MICROECONOMÍA AVANZADA - 2013/2014

Hoja 2: Elección bajo Incertidumbre

Instrucciones: Los ejercicios que debe entregar están marcados en verde. La portada debe descargarse de la página web del curso (y es obligatoria). Rellene datos y grape esta portarda, junto con el resto de ejercicios, en la esquina superior izquierda. Este material no será devuelto, por lo que haga fotocopias y guárdese el original.

$\boxed{1}$ Supongamos que hay tres sucesos.

(a) Un individuo posee una relación de preferencias sobre loterías $\succeq$ que puede ser representada mediante una función de utilidad esperada. Dicha relación satisface

$$(1,0,0) \succ (0,1,0) \succ (0,0,1), \qquad \left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) \sim \left(\frac{5}{12},\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$$

Determinar una función de utilidad que represente las preferencias $\succeq$.

(b) Otro individuo tiene posee una relación de preferencias sobre loterías $\succeq$ que verifica

$$(1,0,0) \sim \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \qquad (0,0,1) \succ (0,1,0), \qquad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) \succ \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

¿Es posible representarlas mediante una función de utilidad esperada?

$\boxed{2}$ Hay una probabilidad del 1% de que ocurra una inundación. El gobierno considera cuatro posibilidades

- Posibilidad A: No se evacua a la población, no siendo necesario hacerlo.
- Posibilidad B: Se evacua a la población, no siendo necesario hacerlo.
- Posibilidad C: Se evacua a la población, siendo necesario hacerlo.
- Posibilidad D: No se evacua a la población, siendo necesario hacerlo.

El gobierno es indiferente entre el suceso seguro B y una lotería entre A, con probabilidad p, y D, con probabilidad $1-p$. También es indiferente entre el suceso seguro C y una lotería entre A, con probabilidad q, y D, con probabilidad $1-q$. Supongamos que prefiere el suceso A al suceso D y que se satisfacen las condiciones del Teorema de la Utilidad Esperada. Encontrar una función de utilidad esperada que represente las preferencias del gobierno.

$\boxed{3}$ Un individuo tienen una función de utilidad $v(x) = \ln x$ sobre cantidades monetarias, una riqueza inicial w y una probabilidad subjetiva p de que su equipo favorito gane la liga. Si gana obtendrá como premio la cantidad de ha apostado, pero si su equipo cae derrotado perderá lo apostado. Sabiendo que su apuesta óptima es $_0$, determinar la probabilidad subjetiva p.

$\boxed{4}$ Un agente averso al riesgo tiene una riqueza inicial de w, pero puede perder D u.m. con probabilidad π. Puede comprar un seguro a un precio unitario de q, por unidad monetaria asegurada. Probar que si el seguro no es actuarialmente ($q > \pi$), entonces el agente elige una cantidad de seguro $\alpha^* < D$ (no se asegura completamente).

$\boxed{5}$ Consideremos un agente averso al riesgo con la función de utilidad $v(x)$ sobre cantidades monetarias y preferencias

$$U(F) = \int v(z)\, dF(z)$$

sobre loterías. Supongamos que en el futuro hay dos estados posibles que ocurren con probabilidades π y $1-\pi$ y que el agente puede elegir entre dos activos, $r_1 = (1,1)$ y $r_2 = (0,3)$

cuyos precios son, respectivamente $q_1 = 1$ y $q_2 = 1$. (Por ejemplo, el activo r_2 paga 0 unidades monetarias si (con probabilidad π) ocurre el estado 1 y paga 3 unidades monetarias si (con probabilidad $1-\pi$) ocurre el estado 2. La riqueza inicial del agente es w. Llamamos α a la cantidad de unidades del activo r_2 que compraría el agente.

(a) Determinar para qué valores de π el agente elige $\alpha = 0$ ó $\alpha = w$.

(b) Suponiendo que la función de utilidad del agente es

$$v(x) = \sqrt{x}$$

calcular la cantidad, α, de unidades del activo r_2 que compraría el agente. ¿Cómo cambia α/w al variar la renta inicial w del agente? Calcular los coeficientes de aversión absoluta y de aversión relativa al riesgo del agente. Explicar los resultados obtenidos utilizando estos coeficientes.

6 Supongamos que el conjunto de sucesos es finito $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, donde los sucesos están ordenados en orden decreciente $c_0 \succeq c_1 \succeq \ldots \succeq c_n$ según una cierta relación de preferencias $\succeq$ que satisface los axiomas de continuidad y de independencia. Sea u una función de utilidad que representa a la relación de preferencias $\succeq$. Identificamos al conjunto $\mathcal{L}$ de loterías sobre C con el símplice de dimensión n. Probar que las soluciones de los problemas

$$\max_{p\in\mathcal{L}} u(p) \quad \text{y} \quad \min_{p\in\mathcal{L}} u(p)$$

se alcanzan en alguno de los puntos $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

7 Un individuo con coche tiene ω euros y se enfrenta a tres alternativas (excluyentes) sobre su futuro: (i) con probabilidad p_1 sufrirá un accidente pequeño, perdiendo L_1 euros; (ii) con probabilidad p_2 sufrirá un accidente grave perdiendo $L_2 > L_1$ euros; y (iii) con probabilidad $1 - p_1 - p_2$ no sufrirá ningún accidente y se quedará con su renta ω. El agente, que es averso al riesgo y maximiza su utilidad esperada, puede elegir entre dos tipos de seguros: (i) el primero es una póliza con franquicia en la que el agente tiene que pagar r y la compañía de seguros le pagará $L_i - D$ en caso de accidente. (ii) el segundo ofrece cobertura parcial. Cuesta r y la compañía le pagará $(1-\alpha)L_i$ en caso de accidente ($0 < \alpha < 1$). Supongamos que $r = p_1(L_1 - D) + p_2(L_2 - D) = p_1(1-\alpha)L_1 + p_2(1-\alpha)L_2$. Demostrar que el individuo siempre comprará la póliza con franquicia.

8 Consideremos un agente con una renta inicial de $m = 10$ y una función de utilidad $v(x) = \ln x$ sobre cantidades monetarias. El agente consume una cantidad c de la renta hoy y ahorra el resto para consumir mañana. La tasa de interés es $r = 5/100$. Además mañana el agente recibe una renta adicional que es incierta (por ejemplo, debido a incertidumbre en el trabajo): con probabilidad $\pi = 1/2$ recibe $y + \alpha$ y con probabilidad $1 - \pi = 1/2$ recibe $y - \alpha$, con $y = 5$ y $0 \leq \alpha \leq 5$.

(a) Plantear el problema de elección de consumo hoy del agente.

(b) Expresar el consumo hoy $c(\alpha)$ y el ahorro del agente como funciones de α.

(c) Probar que $c'(\alpha) < 0$, es decir, al aumentar el riesgo en el futuro, el agente consume menos hoy y ahorra más para el futuro.

9 Consideremos una economía con dos activos. Un bono del estado que paga 1 en cualquier estado y un activo de riesgo que paga a con probabilidad π y b ($b \neq a$) con probabilidad $1 - \pi$. Supongamos que las demandas de los activos son, respectivamente, x_1 y x_2. Supongamos que el agente tiene preferencias del tipo von Neumann–Morgenstern y es averso al riesgo. Su riqueza inicial es 1 y éstos son también los precios de ambos activos.

(a) Dar una condición necesaria en a y b para que la demanda del bono sea positiva.

(b) Dar una condición necesaria en a y b para que la demanda del activo de riesgo sea positiva.

$\boxed{10}$ Supongamos que un individuo tiene preferencias dadas por la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \pi_1 v(x_1) + \pi_2 v(x_2)$ con $\pi_1, \pi_2 \geq 0$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Supongamos que $v' > 0$ y que $v'' < 0$. Probar que si el individuo está indiferente entre los puntos (x_1, x_2) y (x_1', x_2') entonces preferirá estrictamente el punto

$$\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1', \lambda x_2 + (1-\lambda)x_2'\right) \qquad 0 < \lambda < 1$$

a cualquiera de los dos anteriores.

$\boxed{11}$ Teoría del arrepentimiento: Supongamos dos loterías $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Cada uno de los sucesos ocurre con probabilidades $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$. El arrepentimiento esperado con la lotería x respecto de la lotería y es

$$A(x, y) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s h\left(\max\{0, y_s - x_s\}\right)$$

donde h es una función creciente. Es decir, h mide el arrepentimiento del individuo por elegir x una vez sabe cuál ha sido el estado del mundo resultante. Se dice que x es tan bueno como y en presencia de arrepentimiento si $A(x, y) \leq A(y, x)$. Supongamos que hay tres estados, que $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$ y que $h(x) = \sqrt{x}$. Considerar las loterías

$$\begin{aligned} x &= (0, -2, 1) \\ y &= (0, 2, -2) \\ z &= (2, -3, -1) \end{aligned}$$

Probar que el orden de preferencias inducido sobres estas tres loterías no es transitivo.

$\boxed{12}$ Supongamos que un agente tiene una función de utilidad sobre dinero $v(x) = x^2 + \alpha x$ con $\alpha < 0$, definida para $x \leq \frac{-1}{2\alpha}$, con preferencias sobre dinero del tipo utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern. Probar que para toda función de distribución F,

$$U(F) = (\sigma^2(F) + \mu(F)^2) + \alpha\mu(F)$$

donde

$$\mu(F) = \int x\, dF, \qquad \sigma^2(F) = \int (x - \mu(F))^2\, dF$$

es decir, la utilidad sobre una función de distribución está determinada por la media y la varianza de la distribución.

$\boxed{13}$ Calcular las siguientes integrales de Riemann–Stieltjes:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF(x)$, siendo

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \leq x < 6 \\ 5/6 & \text{si } 6 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } 10 \leq x. \end{cases}$$

(b) $\int_0^{\infty} e^{-x}\, d(x^2)$.

$\boxed{14}$ Supongamos que $u(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y que $F(x)$ tiene una derivada continua $F'(x) = f(x)$ en ese mismo intervalo. Probar que

$$\int_a^b v(x)\, dF(x) = \int_a^b v(x) f(x)\, dx.$$

Aplicar este resultado para calcular otra vez $\int_0^{\infty} e^{-x}\, d(x^2)$.

$\boxed{15}$ Consideremos un agente con una función de utilidad sobre cantidades monetarias

$$v(x) = -e^{-rx}$$

donde r es el coeficiente de aversión absoluta al riesgo del agente. Las preferencias sobre loterías F de este agente verifican las hipótesis del Teorema de la Utilidad Esperada:

$$U(F) = \int_{\mathbb{R}} v(x)\, dF(x)$$

Calcular $U(F)$ cuando la función de distribución de una lotería F es una normal de media μ y varianza σ^2. Es decir, la función de densidad de F es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\boxed{16}$ Consideremos el conjunto de loterías con tres premios: 100, 200 y 300. Fijemos una lotería $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. En el simplex de probabilidades, dibuja las loterías que dominan a la lotería π en el sentido de dominancia estocástica de primer orden.

$\boxed{17}$ Supongamos que hay dos agentes cuya función de utilidad sobre cantidades monetarias es $v(x) = \sqrt{x}$. Cada uno de ellos tiene una casa cuyo valor es m. Cada agente se enfrenta (independientemente de lo que le ocurra al otro) a una probabilidad de 1/5 de que haya incendio y la casa quede destruida totalmente. En el país A la regulación estipula que, en caso de incendio, cada agente tiene que asumir sus propias pérdidas. En el país B la ley obliga a que los gastos de los incendios se repartan equitativamente entre los vecinos.

(a) ¿Cuál es el valor monetario esperado en cada uno de los países?

(b) ¿En qué país preferirían vivir los agentes?