MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA - 2012/2013

Hoja 3: Ecuaciones diferenciales

$\boxed{1}$ Compruebe que $x(t) = \pm\sqrt{\ln(C(t^2+1))}$, donde C es una constante positiva, es solución de la ecuación

$$x'(t) = \frac{t}{x(t)(t^2+1)}.$$

$\boxed{2}$ Solucione las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $x' = 3(t-4)(x^2+1)$, con $x(0) = 0$.

(b) $x' = \frac{3t^{\frac{-2}{3}}+1}{4x^3-1}$, con $x(0) = 1$.

(c) $dx = (x^2 - y)dt$.

(d) $\sqrt{x'} - x = 0$, con $x(1) = 1$.

(e) $x' = \frac{\sqrt{x}}{1+t^2}$.

(f) $x' = \frac{1}{2}(x^2-1)$.

(g) $x' = x^{\frac{1}{3}}$.

$\boxed{3}$ Solucione las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $x^2 + 2txx' = 0$

(b) $(1+2tx^2)dt + 2(t^2+1)xdx = 0$

(c) $(\sin x - 1 - x\sin t)dt + (\cos t + t\cos x)dx = 0$

(d) $(2x + te^{tx})x' = -(1 + xe^{tx})$

(e) $(3t^2 + 4tx)dt + (2t^2 + 2x)dx = 0$

$\boxed{4}$ Solucione las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $t(1-x) + (x+t^2)x' = 0$

(b) $tdx - xdt = t^2e^tdt$

(c) $x^2 + 2txx' = 0$

(d) $2tx + (x^2 - 3t^2)x' = 0$

$\boxed{5}$ Solucione las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $x' + 2x = e^t$ con $x(0) = 1$.

(b) $3x' - 2tx = t$ con $x(0) = -1$.

(c) $t(x' - x) = (1+t^2)e^t$.

(d) $x' - x = \frac{e^t}{t}$.

(e) $e^{-t^2}(2tx - x') = t$.

(f) $tx' - \frac{t^2x}{t+2} = te^t$ con $x(1) = 0$.

$\boxed{6}$ Solucione las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $x' = \frac{t^3}{x^3}$.

(b) $x' = \frac{x^3}{t^3}$.

(c) $x' = \frac{\sqrt{t+1}}{x^2}$, with $y(0) = \frac{5}{3}$.

(d) $(t+3x)\,dt+(t-20)\,dx=0$.

(e) $(2xy-\cos x)\,dx+(x^2-1)\,dy=0$, with $y(0)=0$.

(f) $x'+2tx=\cos t e^{-t^2}$, with $x(0)=0$.

(g) $x'+\frac{x}{t}=e^{-t^2}$.

$\boxed{7}$ La ecuación

$$x'+a(t)x=b(t)x^n$$

se denomina *ecuación de Bernoulli*. Es lineal para $n=0$ o $n=1$, es no lineal para $n\neq 0,1$. Supondremos que $n\neq 0,1$.

(a) Probar que el cambio de variable $y=x^{1-n}$ transforma la ecuación en una lineal para $y(t)$.

(b) Resolver $\dot{x}+2x=x^3$, $x(0)=2$.

$\boxed{8}$ Dibujar el diagrama de fases de las dos siguientes ecuaciones, hallar los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad.

(a) $x'=g_1(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)$.

(b) $x'=g_2(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$.

$\boxed{9}$ El modelo de Verhulst en tiempo continuo sobre dinámica de poblaciones es análogo al modelo en tiempo discreto. Se supone que la tasa de crecimiento es proporcional al producto del nivel de población por la capacidad que resta hasta llegar a un nivel de saturación. Por tanto, la población evoluciona de la siguiente forma:

$$P'(t)=kP(t)\left(K-P(t)\right), \qquad k,K>0.$$

Aquí, K es el nivel de saturación de la población. Hallar P y dibujar algunas soluciones.

$\boxed{10}$ En estado natural, la evolución de la población y de una cierta especie de pescado en una determinda área marítima está descrita por la ecuación logística (o de Verhulst)

$$y'=r\left(1-\frac{y}{K}\right)y.$$

La pesca de esta especie se dedica a la alimentación. Se supone que la tasa de capturas, $E(y)$, es proporcional a la población existente y. Es decir, $E(y)=Ey$, con E una constante positiva. Entonces, debido a las capturas, la población se rige por la ecuación

$$y'=r\left(1-\frac{y}{K}\right)y-Ey.$$

Esta ecuación se conoce como *modelo de Schaefer*.

(a) Probar que si $E<r$, entonces existen dos puntos de equilibrio, y_1=0, $y_2>0$;

(b) Mostrar que y_1 es inestable y que y_2 es asintóticamente estable.

(c) Se dice que Y es un rendimiento sostenible de la pesquería si Y es una tasa de capturas que puede mantenerse indefinidamente sin que se extinga la población. Se define como Ey_2. Hallar Y como función del esfuerzo de pesca E y dibujar dicha función (se conoce como curva de esfuerzo–rendimiento).

(d) Determinar E que maximiza Y y encontrar el *el rendimiento sostenible máximo* Y_m.

$\boxed{11}$ Cinco estudiantes con gripe regresan tras las vacaciones de Navidad al campus de su universidad, donde hay en total 2500 estudiantes (contando los cinco protagonistas). El ritmo de contagio de la gripe es proporcional al número de estudiantes infectados, y y al número de no infectados, $2500-y$. Resolver la ecuación

$$y'=ky(2500-y), \qquad y(0)=5$$

para hallar el número de estudiantes infectados después de transcurridos t días, si se sabe que en el primer día ya había 25 estudiantes con gripe. ¿Cuántos estudiantes tendrán la gripe al cabo de cinco días? Determinar el tiempo necesario para que la mitad del campus enferme.

$\boxed{12}$ Responde las siguientes cuestiones:

(a) Halla la EDO homogénea asociada a la ecuación característica:
- $r^2 - 3r + 5 = 0$;
- $r(r+2) = 0$.

(b) Halla la EDO homogénea asociada a partir de las raíces de la ecuación característica:
- $r_1 = 1$, $r_2 = 4$;
- $r_1 = 3 - 4i$, $r_2 = 3 + 4i$.

(c) Hallar la EDO homogénea asociada a partir de su solución general:
- $C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$;
- $C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$;
- $e^{-t/2}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t)$.

$\boxed{13}$ Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones:

(a) $x''' + 3x'' + 3x' + 2x = 0$
(b) $x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$
(c) $x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0$
(d) $x'' - 2x' + 5x = 0$
(e) $x'' - 10x' + 25x = 0$
(f) $y^{iv} - 3y''' + 4y' = 0$
(g) $x''' + 3x'' + 3x' + 2x = 4$
(h) $x'' + 9x = e^t$
(i) $x''' - 3x' - 2x = \cos t$
(j) $x'' + x = sent$
(k) $x'' - 3x' + 2x = (t^2 + t)e^{3t}$

$\boxed{14}$ Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones con condiciones iniciales:

(a) $y'' - 3y' - 4y = t^3$, tal que $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$
(b) $y'' + y' - 2y = 2$, tal que $y(0) = -1$, $y'(1) = 1$

$\boxed{15}$ Una ecuación de la forma
$$t^2 x'' + atx' + bx = 0,$$
donde a y b son números reales es una *ecuación de Euler*. Demuestra que el cambio de variable independiente $s = \ln t$ transforma transforma una ecuación de Euler in una lineal de coeficientes constantes para la nueva variable dependiente $y(s) = x(e^s)$. Aplica lo anterior para resolver la ecuación $t^2 x'' - 4tx' - 6x = 0$ for $t > 0$.

$\boxed{16}$ Un activo con riesgo X se revaloriza en media a una tasa exponencial α, pero está sujeto a fluctuaciones aleatorias con volatilidad (desviación típica) instantánea σ. Sea $V(x)$ el valor de un título que tiene como subyacente a X, y que consiste en que el poseedor del título percibe de manera perpetua $x\,dt$ euros cuando es x el precio del activo X. Asumiendo que r es la tasa de interés constante y sin riesgo que existe en la economía, $r < \alpha$, la condición de no arbitraje (no hay posibilidades de hacer dinero partiendo de 0 euros) permite hallar una ecuación diferencial de segundo orden de Euler para el título $V(x)$
$$\frac{\sigma^2}{2} x^2 V''(x) + \alpha x V'(x) - rV(x) = x.$$

Determina la solución general y selecciona aquélla que consideres es la que tiene sentido económico.

$\boxed{17}$ Se supone que las funciones de demanda y de oferta en un mercado con un único bien son

$$D(t) = 42 - 4P(t) - 4P'(t) + P''(t),$$
$$S(t) = -6 + 8P(t).$$

La demanda depende no sólo del precio actual, P, sino también sobre las expectativas sobre su variación instantánea, reflejadas en las derivadas primera y segunda, P' y P''. Suponiendo que el mercado está en equilibrio en cada instante de tiempo t, i.e. $D(t) = S(t)$, determinar $P(t)$. Hallar una relación lineal entre las condiciones iniciales $P(0)$ y $P'(0)$ de forma que la solución $P(t)$ está acotada.

$\boxed{18}$ Una amante de la naturaleza estudia dos poblaciones vecinas de hormigas rojas y negras. Ha estimado que el número de hormigas negras es de $60,000$ y de rojas de $15,000$. Las hormigas comienzan a luchar y la entomóloga observa que el número de hormigas muertas de una población es proporcional al número de hormigas vivas de la otra. Sin embargo, las rojas son más agresivas que las negras, de manera que su efectividad en la lucha es cuatro veces las de las negras. La observadora recibe una llamada y debe regresar al campamento base, pensando que ambas poblaciones se extinguirán simultáneamente, dado que las dos especies luchan hasta que una de ellas es completamente aniquilada y dado que las poblaciones están en proporción 4 a 1 para las negras pero la efectividad es de 4 a 1 para las rojas. Sin embargo, al regresar a la mañana siguiente al hormiguero, descubre que no es así. Las siguientes cuestiones tratan de clarar lo sucedido a nuestra heroína, que hace ya tiempo que olvidó sus cursos de matemáticas.

(a) Qué especie sobrevive?

(b) Cuántas hormigas de la especie vencedora quedan cuando se extingue la otra especie?

(c) ¿Cuál debería haber sido la proporción inicial en las poblaciones para que ambas especies se hubieran extinguido prácticamente a la vez?

Pista: Denotando $x(t)$ = hormigas negras en el tiempo t, $y(t)$ = rojas en el tiempo t (ambas en miles), justifica que la interacción descrita obedece al sistema de EDOs

$$x'(t) = -4ky(t),$$
$$y'(t) = -kx(t),$$

donde $k > 0$ es una constante que significa la efectividad en la lucha de las hormigas negras. Este sistema puede convertirse en una EDO de segundo orden para $x(t)$ o para $y(t)$. Una vez hecho esto, resolver y hallar las soluciones sabiendo que $x(0) = 60$ y $y(0) = 15$.

$\boxed{19}$ Obtenga la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones completos. En el caso (d) calcule la solución particular para la condición inicial dada:

(a)

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \text{sent} \\ \text{cost} \\ \text{t} \end{pmatrix}$$

(b)

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{cases} x' = -x + y + z + e^t \\ y' = x - y + z + e^{3t} \\ z' = x + y - z + 4 \end{cases}$$

(d)

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} \\ 3\mathrm{t} \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-1} \end{pmatrix}$$

$\boxed{20}$ Clasifique el punto de equilibrio $(0,0)$ de los siguientes sistemas en función de parámetro α.

(a) $X' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 6 & 2\alpha \end{pmatrix} X, \quad (\alpha \neq 0).$

(b) $X' = \begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix} X.$

$\boxed{21}$ El modelo de Obst de política monetaria en presencia de mecanismo de ajuste de la inflación es como sigues. El cociente *demanda de dinero/demanda de oferta* se denota por μ; p es la tasa de inflación; q el la tasa constante de crecimiento del GDP, ym lasa de expansión monetaria. La evolución de p y de μ se supone que está dada por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} p' &= h(1-\mu), \\ \mu' &= (p+q-m)\mu, \end{aligned}$$

donde $0 < h < 1$ es un parámetro.

(a) Suponiendo que $m = \overline{m}$ es constante (es decir, ante una expansión monetaria exógena y constante) y que $\overline{m} > q$, mostrar que el sistema tiene un centro.

(b) Suponiendo que $m = \overline{m} - \alpha p$ with $\alpha > 0$ (política monetaria convencional anticíclica) y que $\overline{m} > q$, mostrar por medio del espacio de fases que el comportamiento cualitativo de las soluciones es similar al del apartado (a) anterior.

(c) Suponiendo que $m = \overline{m} - \alpha\dot{p}$ (esta es la llamada *Regla de Obst*) con $\alpha > 0$ y $\overline{m} > q$, probar que existen valores de α para los que el sistema tiene una espiral estable.

(d) Comenta las características estabilizadoras de la política concencional anticíclica y de la Regla de Obst.