MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA - 2013/2014

Hoja 2: Ecuaciones en diferencias

1 Clasificar las ecuaciones en diferencias siguientes

(a) $x_{t+1} = x_t^2 - e^t$;

(b) $x_{t+1} = x_t - e^t$;

(c) $x_{t+1} = 3.2x_t(1 - 0.25x_t)$;

(d) $x_{t+1} - x_t = -\frac{4}{3}x_t$;

(e) $x_{t+1}(2 + 3x_t) = 4x_t$;

(f) $x_{t+2} = 3x_{t+1} - x_t + t$;

(g) $x_{t+4} - x_{t+3} = \sqrt[3]{x_{t+1}}$.

2 Comprobar que las sucesiones siguientes son solución de las correspondientes ecuaciones en diferencias.

(a) $x_t = 2^t$; $x_{t+2} = x_{t+1} + 2x_t$;

(b) $x_t = \frac{t(t+1)}{2}$; $x_{t+1} = x_t + t + 1$;

(c) $x_t = \cos \pi t$; $x_{t+1} = -x_t$;

(d) $x_t = 2^t + 1$; $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 0$;

(e) $x_t = C_1 + C_2 2^t - t$; $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 1$.

3 Considere la ecuación en diferencias $x_{t+1} = \sqrt{x_t - 1}$ con $x_0 = 5$. Calcule x_1, x_2. and x_3. ¿Y qué sucede con x_4?

4 Encontrar las soluciones de las ecuaciones en diferencias siguientes:

(a) $x_{t+1} = 2x_t + 4$, $x_0 = 1$;

(b) $2x_{t+1} + 3x_t + 2 = 0$;

(c) $x_{t+1} - x_t = -\frac{4}{3}x_t$;

(d) $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 0$;

(e) $x_{t+2} - 5x_{t+1} = -6x_t$;

(f) $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 0$;

(g) $x_{t+2} = -3x_{t+1} - 3x_t = 0$;

(h) $x_{t+4} - 2x_{t+2} + x_t = 0$;

(i) $x_{t+3} = x_t$;

Para los casos (a), (b), y (c) obtener las soluciones particulares cuando las condiciones iniciales son $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, and $x_0 = 3$ respectivamente. ¿Cuál se su comportamiento a largo plazo?

5 Obtener la solución de las ecuaciones siguientes:

(a) $x_{t+2} - 4x_{t+1} + 4x_t = 3^t$

(b) $x_{t+2} - 2x_{t+1} + 2x_t = t$

(c) $x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t = 2^t + t$

(d) $x_{t+2} - 4x_{t+1} + 4x_t = 2^t$

(e) $x_{t+3} - x_{t+2} + x_{t+1} - x_t = 2$

(f) $x_{t+3} - 8x_t = t^2$

(g) $24x_{t+3} - 14x_{t+2} - 9x_{t+1} - x_t = t + 3^t$

(h) $x_{t+4} - x_t = 2^t + 3^t$

(i) $x_{t+3} + x_{t+2} - 5x_{t+1} + 3x_t = t^2 + 1$

(j) $x_{t+2} - 25x_t = t^2 + 1$

$\boxed{6}$ Estudie la estabilidad de las ecuaciones: (a) $x_{t+1} - \frac{1}{4}x_t = b_t$, (b) $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = c_t$, donde $\{b_t\}$ y $\{c_t\}$ son dos sucesiones dadas.

$\boxed{7}$ Solucione la ecuación Fubinacci $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$, $x_0 = x_1 = 1$ y compruebe que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \equiv \varphi, \quad \text{la proporción áurea.}$$

$\boxed{8}$ En un país la renta nacional Y_t se dedica al consumo y la inversión

$$Y_{t+1} = C_t + I_t,$$

donde C_t denota consumo y I_t la inversión. Suponiendo que $C_t = mY_t + c$, con $0 \leq m < 1$, $c > 0$ y que $I_t = I$ es constante, encontrar una ecuación en diferencias para la renta nacional Y_t, resolverla, y estudiar el comportamiento a largo plazo de la solución.

$\boxed{9}$ Sea S_0 una cantidad inicial de dinero. Existen principalmente dos dos maneras de calcular el interés generado en un período, por ejemplo, en un año:

(a) S_0 genera *interés simple* al tanto de interés r si en cada período el interés es una fracción r de S_0.

(b) S_0 genera *interés compuesto* al tanto de interés r si en cada período el interés es una fracción r de la suma acumula al inicio de dicho período.

Hallar una ecuación en diferencias para los dos modelos anteriores y encontrar la solución.

$\boxed{10}$ Dadas las funciones de demanda y de oferta para el modelo de la telaraña que se especifican más abajo, encontrar el precio de equilibrio y determinar si el equilibrio es estable.

(a) $Q_d = 18 - 3P$, $Q_s = -3 + 4P$;

(b) $Q_d = 22 - 3P$, $Q_s = -2 + P$;

(c) $Q_d = 16 - 6P$, $Q_s = 6P - 5$;

$\boxed{11}$ Considera la ecuación del modelo del multiplicador–acelerador del crecimiento que se obtuvo en las notas de clase

$$Y_{t+2} - a(1+c)Y_{t+1} + acY_t = b,$$

con $a > 0$, $c > 0$ y $a \neq 1$.

(a) Halla una solución particular de la ecuación;

(b) Discute cuándo las soluciones de la ecuación característica son reales o complejas.

(c) Halla la solución general en cada uno de los siguientes casos.

i. $a = 4$, $c = 1$;

ii. $a = \frac{3}{4}$, $c = 3$;

iii. $a = 0.5$, $c = 1$.

12 Sea C_t el consumo, K_t el stock de capital y Y_t el producto nacional neto. Se supone que estas tres variables están relacionadas por

$$\begin{aligned} C_t &= cY_{t-1}, \\ K_t &= \sigma Y_{t-1}, \\ Y_t &= C_t + K_t - K_{t-1}, \end{aligned}$$

donde c y σ son constantes positivas.

(a) Da una interpretación económica de las relaciones anteriores.

(b) Halla una ecuación en diferencias de orden dos para Y_t.

(c) Establece condiciones necesarias y suficientes para que Y_t muestre oscilaciones explosivas.

13 Solucione los sistemas de ecuaciones en diferencias $X_{t+1} = AX_t + B$, donde la matriz A y el vector B están dados por:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

14 Para los casos (a), (b) y (c) del ejercicio anterior, obtenga las soluciones cuando $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

15 K. es una estudiante con el siguiente hábito de estudio: si estudia un día, la probabilidad de que no estudie al día siguiente es 0.7. Por otro lado, la probabilidad de que K. no estudie dos días consecutivos es 0.6. Suponiendo que K. estudia hoy, ¿con qué probabilidad estudiará K. en el largo plazo?

16 Un experimentador sitúa a un ratón en una jaula que tiene dos puertas, A y B. Al pasar por A, el ratón recibe una pequeña descarga eléctrica, pero tras la puerta B se oculta comida. Al principio del experimento (un lunes), el ratón elige A o B con la misma probabilidad. Después de elegir B, la probabilidad de que al día siguiente elija B es de 0.6.

(a) ¿Con qué probabilidad se dirigirá el ratón hacia la puerta A el jueves de la primera semana?

(b) ¿Cuál es la distribución estacionaria de este experimento?

(c) Posiblemente, ¿qué pensará el ratón sobre el experimentador?

17 Pruebe que una ecuación cuadrática $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ tiene raíces que satisfacen $|\lambda| < 1$ si y sólo si

$$|p| < 1 + q \text{ y } q < 1.$$

La condición se llama *Condición de Jury*.

18 **Curva de Phillips I**.

La *curva de Phillips* relaciona negativamente la tasa de crecimiento de los salarios monetarios w y la tasa de desempleo U

$$w = f(U), \qquad f'(U) < 0. \tag{1}$$

Esta relación fue justificada empíricamente para el Reino Unido por A.W. Phillips en un trabajo muy influyente[1]. Más tarde, se postuló que dicha relación podía también establecerse entre la tasa de inflación p y la tasa de desempleo, dado que un incremento en los salarios monetarios debería tener efectos inflacionarios[2]. Si se tiene en cuenta la productividad laboral, la tasa de inflación es

$$p = w - T,$$

donde T es el incremento de la productividad laboral, que se considera constante y exógena (hay inflación sólo si los salarios crecen más rápido que la productividad). Suponiendo un forma lineal para la función f, $f(U) = \alpha - \beta U$, tenemos que para todo $t \geq 1$

$$p_t = \alpha - T - \beta U_t, \qquad \alpha, \beta > 0. \tag{2}$$

Por otra parte, la tasa de desempleo puede relacionarse con la tasa de inflación de la siguiente forma:

$$U_{t+1} - U_t = -k(m - p_t), \qquad 0 < k \leq 1, \tag{3}$$

donde m es la tasa de crecimiento de los saldos nominales[3]. Dado que $m - p$ es la tasa de crecimiento del dinero real en la economía, (3) establece que la tasa de crecimiento del desempleo está negativamente relacionada con la tasa de crecimiento de los saldos reales.

Se pide encontrar una ecuación para U_t y estudiar su estabilidad.

$\boxed{19}$ **Curva de Phillips II**.

Continuando con el modelo de Phillips, analizamos ahora una modificación introducida por M. Friedman[4], que es la versión de la curva de Phillips *aumentada por expectativas*

$$w = f(U) + g\pi, \qquad (0 < g \leq 1), \tag{4}$$

donde π denota la tasa de inflación *esperada*. La idea es que si se ha observado una tendencia inflacionaria suficientemente sostenida, entonces la gente crea ciertas expectativas de que la inflación va a seguir creciendo. Esta creencia afecta a la demanda de salarios.

Al incorporar este comportamiento en (2), resulta la relación

$$p_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t, \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Queda por determinar cómo se forman las expectativas sobre la inflación. Es habitual utilizar la hipótesis de *expectativas adaptadas*

$$\pi_{t+1} - \pi_t = j(p_t - \pi_t), \qquad 0 < j \leq 1. \tag{6}$$

La interpretación es que cuando la tasa de inflación real p supera a la tasa esperada π, ésta, dado que ha sido una estimación demasiado baja, se revisa al alta para el próximo período. Recíprocamente, si p es inferior a π, entonces π se revisa a la baja. La velocidad del ajuste depende de j.

Considere el modelo dado por la ecuaciones (3), (5) y (6).

---

[1] A.W. Phillips (1956) "The relationship between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom," *Economica*, November 1958, pp. 283–299.

[2] La tasa de crecimiento de los salarios es $(W_{t+1} - W_t)/W_t$, donde W_t es el salario en el tiempo t; la tasa de inflación es la tasa de crecimiento de los precios, $p_t = (P_{t+1} - P_t)/P_t$.

[3] Es decir, $m = (M_{t+1} - M_t)/M_t$, donde M_t son los saldos nominales, fijado por la autoridad monetaria, que se supone constante, independiente de t.

[4] M. Friedman (1968) "The role of monetary policy," *American Economic Review*, pp. 1–17.

(a) Elimine p_t y escriba un sistema de ecuaciones en diferencias para las variables (U_t, π_t).

(b) Utilizando la condición de Jury, determine si el sistema es g.a.e.

(c) Encuentre e interpreta los puntos fijos o soluciones de equilibrio del sistema.

$$\begin{aligned} C_t &= cY_{t-1}, \\ K_t &= \sigma Y_{t-1}, \\ Y_t &= C_t + K_t - K_{t-1}, \end{aligned}$$

donde c y σ son constantes positivas.

(a) Da una interpretación económica de las relaciones anteriores.

(b) Halla una ecuación en diferencias de orden dos para Y_t.

(c) Establece condiciones necesarias y suficientes para que Y_t muestre oscilaciones explosivas.