Capítulo 2: Ecuaciones en diferencias

1. Introducción

En este capítulo consideraremos sistemas de ecuaciones en los que cada variable está indexada en el tiempo $t = 0, 1, 2, \ldots$, y variables correspondientes a tiempos distintos están relacionadas de una manera no trivial. Tales sistemas se denominan *sistemas de ecuaciones en diferencias* y son muy útiles para describir *sistemas dinámicos en tiempo discreto*
El estudio de modelos dinámicos en economía es importante dado que permite eliminar la hipótesis (estática) de que el proceso de ajuste es instantáneo e inevitablemente da lugar a un equilibrio. En un contexto dinámico, esta propiedad de estabilidad tiene que ser comprobada y no puede ser asumida a priori.
En lo que sigue consideraremos que el tiempo $t = 0, 1, \ldots$ es discreto. Una función $X : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dependiente del tiempo es simplemente una sucesión de vectores de n dimensiones

$$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

Si cada vector está relacionado con el vector previo por medio de una aplicación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la forma

$$X_{t+1} = f(X_t), \qquad t = 0, 1, \ldots,$$

entonces estamos ante un *sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden.* En la siguiente definición se generaliza a sistemas con un mayor período de retraso y que pueden incluir t explícitamente.

Definición 1.1. Un sistema de ecuaciones en diferencias de orden k es una expresión de la forma

$$X_{t+k} = f(X_{t+k-1}, \ldots, X_t, t), \qquad t = 0, 1, \ldots, \tag{1.1}$$

donde cada $X_t \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El sistema es:

- *autónomo*, si f no depende de t;
- *lineal*, si la aplicación f es lineal en las variables $(X_{t+k-1}, \ldots, X_t)$;
- *de primer orden*, si $k = 1$.

Definición 1.2. Una sucesión $\{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ obtenida mediante la recursión (1.1) con valor inicial X_0 es una trayectoria u órbita del sistema dinámico con origen en X_0.

En lo sucesivo escribiremos x_t en lugar de X_t si la variable X_t es un escalar.

Ejemplo 1.3. [Progresiones geométricas y aritméticas] Sea $\{x_t\}$ ls sucesión de números reales definida por $x_{t+1} = qx_t$, $t = 0, 1, \ldots$, con $q \in \mathbb{R}$. Se trata de una ecuación en diferencias de primer orden, autónoma y lineal. La solución es obviamente $x_t = q^t x_0$. De forma análoga, para la progresión aritmética, $x_{t+1} = x_t + d$, con $d \in \mathbb{R}$, la solución es $x_t = x_0 + td$.

Ejemplo 1.4.

- $x_{t+1} = x_t + t$ es lineal, no autónoma y de primer orden;
- $x_{t+2} = -x_t$ es lineal, autónoma y de segundo orden;
- $x_{t+1} = x_t^2 + 1$ es no lineal, autónoma y de primer orden.

Ejemplo 1.5. [Números de Fibonacci (1202)] "Cuántas parejas de conejos habrá al cabo de un año, a partir de una única pareja, si todos los meses cada pareja procrea una nueva pareja que se vuelve productiva a partir del segundo mes?". Si x_t denota el número de parejas de conejos en el mes t, entonces el problema puede planterase como

$$x_{t+2} = x_{t+1} + x_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \text{ con } x_0 = 1 \text{ y } x_1 = 1.$$

Esta ecuación en diferencias autónoma y de segundo orden será resuelta más adelante.

2. Sistemas de ecuaciones en diferencias de primer orden

Los sistemas de orden superior $k > 1$ pueden reducirse a sistemas de primer orden al introducir nuevas variables. Esta es la razón por la que estudiamos principalmente sistemas de primer orden. En lugar de describir el método general, presentaremos un ejemplo sencillo de cómo esta reducción puede realizarse.

Ejemplo 2.1. Se considera la ecuación en diferencias de segundo orden $y_{t+2} = g(y_{t+1}, y_t)$. Si definimos $x_{1,t} = y_{t+1}$, $x_{2,t} = y_t$, entonces $x_{2,t+1} = y_{t+1} = x_{1,t}$ y obtenemos el sistema de primer orden dado por:

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_{1,t}, x_{2,t}) \\ x_{1,t} \end{pmatrix}.$$

Denotando $X_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$, $f(X_t) = \begin{pmatrix} g(X_t) \\ x_{1,t} \end{pmatrix}$, el sistema puede reescribirse en la forma $X_{t+1} = f(X_t)$.

Por ejemplo, la ecuación de segundo orden $y_{t+2} = 4y_{t+1} + y_t^2 + 1$ puede reducirse al sistema de primer orden

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_{1,t} + x_{2,t}^2 + 1 \\ x_{1,t} \end{pmatrix},$$

así como la ecuación de Fibonacci del Ejemplo 1.5 se transforma en

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,t} + x_{2,t} \\ x_{1,t} \end{pmatrix},$$

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, utilizaremos la siguiente notación: f^t denota la composición de f con ella misma t veces, es decir, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ y, en general, $f^t = f \circ f^{t-1}$ para $t = 1, 2, \ldots$. También definimos f^0 como la función identidad, $f^0(X) = X$.

Teorema 2.2. *Sea el sistema autónomo de primer orden $X_{t+1} = f(X_t)$ para el que existe un subconjunto D tal que para todo $X \in D$, $f(X,t) \subseteq D$. Entonces, dada cualquier condición inicial $X_0 \in D$, la sucesión $\{X_t\}$ está dada por*

$$X_t = f^t(X_0).$$

Demostración. La prueba es inmediata observando que

$$\begin{aligned} X_1 &= f(X_0), \\ X_2 &= f(X_1) = f(f(X_0)) = f^2(X_0), \\ &\vdots \\ X_t &= f(f \cdots f(X_0) \cdots)) = f^t(X_0). \end{aligned}$$

□

El teorema proporciona el valor actual de X, X_t, en función de la condición inicial, X_0. Aunque esto es interesante, muy a menudo la expresión $X_t = f^t(X_0)$, es meramente formal, puesto que f^t no es fácilmente computable. En estos casos, nos interesa más conocer el comportamiento de X_t en el largo plazo, es decir, conocer el límite (si existe)

$$\lim_{t\to\infty} f^t(X_0).$$

Generalmente es más útil estudiar este límite que obtener una expresión analítica de X_t. A pesar de todo, existen casos donde la solución puede encontrarse explícitamente y que permiten un estudio detallado del límite anterior.

Si el límite existe, $\lim_{t\to\infty} f^t(X_0) = X^0$, y f es continua, entonces

$$f(X^0) = f(\lim_{t\to\infty} f^t(X_0)) = \lim_{t\to\infty} f^{t+1}(X_0) = X^0.$$

Por tanto, el límite X^0 resulta ser un *punto fijo* de la función f. Esta es la razón por la que los puntos fijos de f juegan un papel muy relevante en el estudio de los sistemas dinámicos.

Definición 2.3. Un punto $X^0 \in D$ es un punto fijo del sistema dinámico definido por f si comenzando desde X^0, $X_t = X_0$ es una solución:

$$\text{Si } X_0 = X^0, \text{ entonces } X_t = X^0, \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

Obviamente, X^0 es también un punto fijo de la aplicación f. Otras denominaciones para punto fijo son: *equilibrio*, *punto estacionario*, o *estado estacionario.*

Ejemplo 2.4. En el Ejemplo 1.3 ($x_{t+1} = qx_t$), si $q = 1$, entonces todo número real es un punto fijo de la ecuación; si $q \neq 1$, entonces existe un único punto fijo: $x^0 = 0$. Notar que la solución $x_t = q^t x_0$ tiene el siguiente límite dependiendo del valor de q (se supone que $x_0 \neq 0$).

$$\begin{aligned}
-1 < q < 1 &\Rightarrow \lim_{t\to\infty} q^t x_0 = 0, \\
q = 1 &\Rightarrow \lim_{t\to\infty} q^t x_0 = x_0, \\
q \leq -1 &\Rightarrow \text{ la sucesión oscila entre } + \text{ y } - \text{ y el límite no existe,} \\
q > 1 &\Rightarrow \lim_{t\to\infty} q^t x_0 = \pm\infty, \text{ el signo depende del signo de } x_0.
\end{aligned}$$

En el Ejemplo 1.5, $x^0 = 0$ es el único punto fijo de la ecuación.
Para la ecuación en diferencias $x_{t+1} = x_t^2 - 6$, los puntos fijos son las solcuiones de $x = x^2 - 6$, es decir, $x^0 = -2$ y $x^0 = 3$. Sin embargo, se observa claramente que ninguna solución con $x_0 \neq -2$ o $x_0 \neq 6$ converge a ninguno de estos puntos. En realidad, $x_t \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

En las definiciones siguientes, $\|X-Y\|$ denota la distancia Euclídea entre los vectores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ y $Y = (y_1, \ldots, y_n)$:

$$\|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Por ejemplo, si $X = (1, 2, 3)$ y $Y = (3, 6, 7)$, entonces

$$\|X - Y\| = \sqrt{(3-1)^2 + (6-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Definición 2.5.

- Un punto fijo X^0 es estable si para cualquier estado inicial X_0 suficientemente próximo, la trayectoria asociada $\{X_t\}$ existe y permanece próxima a X^0, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\|X_0 - X^0\| < \delta(\epsilon)$, entonces $\|X_t - X^0\| < \varepsilon$ para todo t.
- Un punto fijo estable X^0 es localmente asíntoticamente estable (l.a.e.) si la trayectoria $\{X_t\}$ con condición inicial X_0 suficientemente próxima a X^0converge al punto fijo, es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $\|X_0 - X^0\| < \delta$, entonces $\lim_{t\to\infty} X_t = X^0$.
- Un punto fijo estable es globalmente asíntoticamente estable (g.a.e.) si cualquier trayectoria generada a partir de cualquier condición inicial X_0 converge a dicho punto fijo.
- Un punto fijo es inestable si no es estable o asíntoticamente estable.

Observación 2.6.

- g.a.e. $\Rightarrow$ l.a.e. $\Rightarrow$ estable.
- Si X^0 es estable, pero no l.a.e., entonces $\{X_t\}$ no converge a X^0.
- Un punto fijo g.a.e. es necesariamente único.
- Puede haber varios puntos fijos l.a.e.
- Si X^0 es l.a.e., entonces perturbaciones pequeñas alrededor de X^0 decaen y la trayectoria generada por el sistema retorna al punto fijo en el largo plazo.

Definición 2.7. Sea P un entero mayor que 1. Una serie de vectores $X_0, X_1, \ldots, X_{P-1}$ es un ciclo de período P (o P-ciclo simplemente) del sistema f si una trayectoria desde X_0 toma los valores $X_1, \ldots, X_{P-1}$ y retorna a X_0, es decir,

$$X_{t+1} = f(X_t), \qquad t = 0, 1, \ldots, P-1, \qquad X_P = X_0.$$

Observar que la serie de vectores $X_0, X_1, \ldots, X_P$ se repite periódicamente en la trayectoria,

$$\{X_t\} = \{X_0, X_1, \ldots, X_{P-1}, X_0, X_1, \ldots, X_{P-1}, \ldots\}.$$

Por esta razón, la trayectoria se designa también como un P–ciclo.

Ejemplo 2.8. En el Ejemplo 1.3 ($x_{t+1} = qx_t$) con $q = -1$ todas las trayectorias son 2–ciclos, porque la solución es

$$\{x_0, -x_0, x_0, -x_0, \ldots\}.$$

Ejemplo 2.9. En el Ejemplo 1.4 donde $y_{t+2} = -y_t$, para encontrar los posibles ciclos de la ecuación, primero es necesario escribirla como un sistema de orden 1, para lo que utilizamos el Ejemplo 2.1,

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{2,t} \\ x_{1,t} \end{pmatrix} \equiv f(X_t).$$

Sea $X_0 = (2, 4)$. Entonces

$$\begin{aligned} X_1 &= f(X_0) = (-4, 2), \\ X_2 &= f(X_1) = (-2, -4), \\ X_3 &= f(X_2) = (4, -2), \\ X_4 &= f(X_3) = (2, 4) = X_0. \end{aligned}$$

Por tanto, aparece un 4–ciclo que comienza en X_0. De hecho, cualquier trayectoria es un 4–ciclo.

3. Ecuación lineal de primer orden

La ecuación lineal de orden uno es de la forma

$$x_{t+1} = ax_t + b, \qquad x_t \in \mathbb{R}, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Consideramos primero $b = 0$ (caso homogéneo). Entonces, el Teorema 2.2 proporciona la solución $x_t = a^t x_0$, $t = 0, 1, \ldots$. El caso no homogéneo $b \neq 0$ será reducido a éste de la siguiente manera: los puntos fijos de la ecuación son las soluciones de (ver Definición 2.3)

$$x^0 = ax^0 + b,$$

luego no existen puntos fijos si $a = 1$. Sin embargo, cuando $a \neq 1$ el (único) punto fijo es

$$x^0 = \frac{b}{1-a}.$$

Definiendo ahora $y_t = x_t - x^0$ y reemplazando $x_t = y_t + x^0$ en (3.1) obtenemos

$$y_{t+1} = ay_t,$$

que tiene solución $y_t = a^t y_0$. Volviendo a la variable x_t, la solución de la ecuación lineal es

$$\begin{aligned} x_t &= x^0 + a^t(x_0 - x^0) \\ &= \frac{b}{1-a} + a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, si $a = 1$ la solución es $x_t = x_0 + bt$, $t = 0, 1, \ldots$.

Teorema 3.1. *Para la ecuación* (3.1)*, el único punto fijo* $x^0 = \frac{b}{1-a}$ *es g.a.e. sii* $|a| < 1$.

Demostración. Notar que $\lim_{t\to\infty} a^t = 0$ sii $|a| < 1$ y, por tanto, $\lim_{t\to\infty} x_t = \lim_{t\to\infty} x^0 + a^t(x_0 - x^0) = x^0$ sii $|a| < 1$, independientemente de la condición inicial x_0. $\square$

La convergencia es monótona si $0 < a < 1$ y oscilante (la solución alterna valores positivos y negativos) si $-1 < a < 0$.

Ejemplo 3.2 (Modelo del Multiplicador–Acelerador del Crecimiento)**.** Sea Y_t la renta nacional, I_t la inversión total, y S_t el ahorro total—todas las variables en el período t. Se supone que los ahorros son proporcionales al nivel de la renta nacional y que la inversión es proporcional al cambio en el nivel de renta en dos períodos consecutivos. Entonces, para $t = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha Y_t, \\ I_{t+1} &= \beta(Y_{t+1} - Y_t), \\ S_t &= I_t. \end{aligned}$$

La última igualdad es una condición de equilibrio: el ahorro iguala a la inversión en cada período. Se supone $\beta > \alpha > 0$. Puede encontrarse una ecuación en diferencias para Y_t y resolverla de la siguiente forma. A partir de las ecuaciones primera y tercera, $I_t = \alpha Y_t$ y, por tanto, $I_{t+1} = \alpha Y_{t+1}$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación tenemos $\alpha Y_{t+1} = \beta(Y_{t+1} - Y_t)$, o $(\alpha - \beta)Y_{t+1} = -\beta Y_t$. En consecuencia

$$Y_{t+1} = \frac{\beta}{\beta - \alpha} Y_t = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta - \alpha}\right) Y_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

La solución es

$$Y_t = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta - \alpha}\right)^t Y_0, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Vemos que Y crece a la tasa constante $g = \alpha/(\beta - \alpha)$ en cada período, ya que $g = (Y_{t+1} - Y_t)/Y_t$.

Ejemplo 3.3 (El modelo de la telaraña)**.** Se considera un mercado con un único bien donde el nivel de producción debe fijarse con un período de antelación a la realización de la venta. Esta situación es típica en la producción agrícola, donde la siembra precede con bastante antelación a la recolección y la venta del producto. Suponemos que el nivel de producción en el período t se basa en el precio P_t, pero dado que el output no estará disponible hasta el período $t + 1$, la oferta está retrasada un período,

$$Q_{s,t+1} = S(P_t).$$

La demanda en el tiempo t se determina mediante una función que depende del precio P_t,

$$Q_{d,t} = D(P_t).$$

Suponiendo que tanto la oferta como la demanda son funciones que dependen linealmente del precio, es decir, $S(P) = -\gamma + \delta P$, $D(P) = \alpha - \beta P$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$ y que los mercados se vacían, tenemos las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} Q_{d,t} &= Q_{s,t}, \\ Q_{d,t+1} &= \alpha - \beta P_{t+1}, \\ Q_{s,t+1} &= -\gamma + \delta P_t. \end{aligned}$$

Sustituyendo las dos últimas igualdades en la primera, ésta proporciona la siguiente ecuación en diferencias para el precio:

$$P_{t+1} = -\frac{\delta}{\beta} P_t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta}.$$

El punto fijo es $P^0 = (\alpha + \gamma)/(\beta + \delta)$, que es también el precio de equilibrio del mercado, es decir, $S(P^0) = D(P^0)$. La solución es

$$P_{t+1} = P^0 + \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t (P_0 - P^0).$$

Dado que $-\delta/\beta$ es negativa, la solución es oscilante. Este hecho da lugar al mecanismo de ajuste conocido como dinámica de la telaraña. Podemos distinguir tres tipos de oscilaciones: *explosiva* si

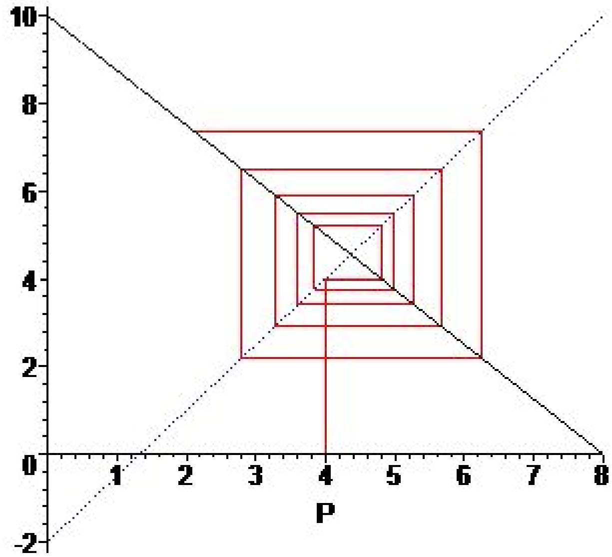


Figura 1. Diagrama de la telaraña con oscilaciones explosivas

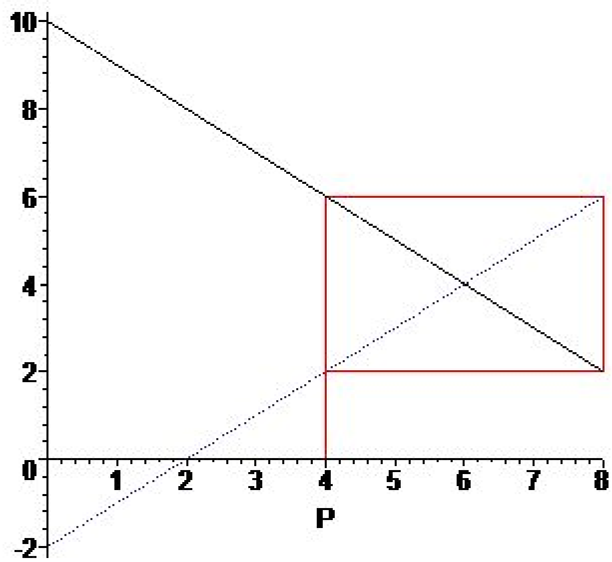


Figura 2. Diagrama de la telaraña con oscilaciones uniformes

$\delta > \beta$ (S tiene más inclinación que D), *uniforme* si $\delta = \beta$, y *amortiguadas* si $\delta < \beta$ (S más plana que D). Estas tres posibilidades se ilustran en las gráficas siguientes. La demanda tiene pendiente negativa $-\beta$, mientras que la oferta tiene pendiente positiva δ. Cuando $\delta > \beta$, como en la Figura 1, la interacción entre demanda y oferta da lugar a oscilaciones explosivas mediante el siguiente mecanismo: dado un precio inicial P_0, la cantidad de bien ofertada en el siguiente período será $Q_1 = S(P_0)$. Para vaciar el mercado se necesita que la cantidad demandada en el período 1 sea Q_1, para lo que el precio debe moverse hasta P_1 dado por la ecuación $Q_1 = D(P_1)$. Ahora, via la curva S, el precio P_1 da lugar a $Q_2 = S(P_1)$ como la cantidad ofertada en el período 2, y para vaciar el mercado, el precio debe ser el precio P_2 fijado por la curva de demanda. Repitiendo este razonamiento, surge una telaraña alrededor del punto de equilibrio.

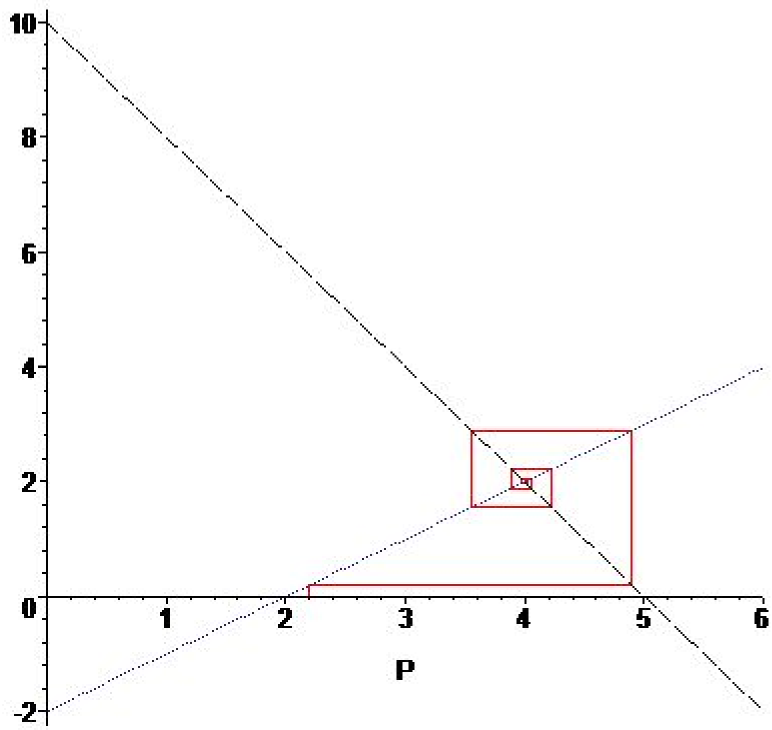


Figura 3. Diagrama de la telaraña con oscilaciones amortiguadas

4. Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden

La ecuación lineal de segundo orden es

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = b_t,$$

donde a_1 y a_0 son constantes y b_t es una función dada de t. La *ecuación homogénea* asociada

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0,$$

y la *ecuación característica* asociada es

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática tiene soluciones

$$r_1 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}, \qquad r_2 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}.$$

Podemos distinguir tres casos atendiendo al signo del discriminante de la ecuación, $a_1^2 - 4a_0$. Cuando es negativo, las soluciones son números complejos (conjugados).

Un número complejo se escribe $z = a + ib$, donde a y b son números reales y $i = \sqrt{-1}$ es la *unidad imaginaria*, que verifica $i^2 = -1$. La *parte real* del número complejo z es a, y la *parte imaginaria* de z es b. El conjugado de $z = a + ib$ es $\overline{z} = a - ib$. Los números complejos pueden sumarse y multiplicarse entre sí con las siguientes reglas: $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ y

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2 bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Para nuestros propósitos, necesitamos los conceptos de *módulo* y *argumento* de un número complejo. El módulo de z es $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se cumple que $z\overline{z} = \rho$, como puede comprobarse fácilmente. El argumento de z es el ángulo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\tan\theta = b/a$.

Para calcular el argumento de un número complejo, puede ser útil recordar la siguiente tabla de valores trigonométricos:

θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

Los valores negativos de θ están relacionados con los valores positivos por las relaciones $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ y $\cos(-\theta) = \cos\theta$, de forma que $\tan(-\theta) = -\tan\theta$. Por ejemplo, el módulo y argumento de $1-i$ son $\rho = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ y $\theta = -\pi/2$, respectivamente, dado que $\tan\theta = -1/1 = -1$.

Teorema 4.1. *La solución general de*

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{4.1}$$

es:

1. *Si $a_1^2 - 4a_0 > 0$ (la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas),*
$$x_t = Ar_1^t + Br_2^t, \qquad r_{1,2} = -\frac{1}{2}a_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}.$$
2. *Si $a_1^2 - 4a_0 = 0$ (la ecuación característica tiene una única raíz real),*
$$x_t = (A+Bt)r^t, \qquad r = -\frac{1}{2}a_1.$$
3. *Si $a_1^2 - 4a_0 < 0$ (la ecuación característica no tiene raíces reales),*
$$x_t = \rho^t(A\cos\theta t + B\operatorname{sen}\theta t), \quad \rho = \sqrt{a_0}, \quad \tan\theta = -\frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{a_1}, \quad \theta \in [0,\pi].$$

Observación 4.2. Cuando la ecuación característica tiene raíces complejas, la solución de (4.1) es oscilante. Si $\rho < 1$, entonces ρ^t tiende a 0 cuando $t \to \infty$ y las oscilaciones se amortiguan con el tiempo. Si $\rho > 1$, las oscilaciones son explosivas, y en el caso $\rho = 1$, las oscilaciones son uniformes.

Ejemplo 4.3. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $x_{t+2} - 7x_{t+1} + 6x_t = 0$, (b) $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 0$, (c) $x_{t+2} - 2x_{t+1} + 4x_t = 0$.

Solución: (a) La ecuación característica es $r^2 - 7r + 6 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 6$ y $r_2 = 1$, por lo que la solución general es

$$x_t = A6^t + B, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) La ecuación característica es $r^2 - 6r + 9 = 0$, que tiene una raíz doble, $r = 3$. La solución general es

$$x_t = 3^t(A+Bt).$$

(c) La ecuación característica es $r^2 - 2r + 4 = 0$, con soluciones complejas $r_1 = \frac{1}{2}(2+\sqrt{-12}) = 1+i\sqrt{3}$, $r_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Por tanto, $\rho = 2$ y $\tan\theta = -\frac{\sqrt{12}}{-2} = \sqrt{3}$, es decir, $\theta = \pi/3$. La solución general es

$$x_t = 2^t\left(A\cos\frac{\pi}{3}t + B\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}t\right).$$

4.1. La ecuación no homogénea. La ecuación no homogénea de segundo orden es de la forma

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = b_t. \tag{4.2}$$

Sea x_t^* una *solución particular*. Puede demostrarse que las soluciones de la ecuación tienen una interesante estructura, debida a la linealidad de la ecuación.

Teorema 4.4. *La solución general de la ecuación no homogénea* (4.2) *es suma de la solución general de la homogénea* (4.1) *y de una solución particular* x_t^* *de la no homogénea.*

Ejemplo 4.5. Hallar la solución general de $x_{t+2} - 4x_t = 3$.

Solución: Notar que $x_t^* = -1$ es una solución particular. Para encontrar la solución general de la ecuación homogénea, hallamos las soluciones de la ecuación característica, $r^2 - 4 = 0$, $r_{1,2} = \pm 2$. Por tanto, la solución general de la no homogénea es

$$x_t = A(-2)^t + B2^t - 1.$$

Ejemplo 4.6. Hallar la solución general de $x_{t+2} - 4x_t = t$.

Solución: En este caso no es evidente cómo encontrar una solución particular. Una forma es utilizar *el método de los coeficientes indeterminados*, que consiste en intentar una expresión de la forma $x_t^* = Ct + D$, donde C y D son constantes adecuadas tales que x_t^* es solución. Sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$C(t+2) + D - 4(Ct + D) = t, \qquad \forall t = 0, 1, 2, \ldots$$

Por tanto, debe ocurrir $C - 4C = 1$ y $2C + D - 4D = 0$, de donde $C = -1/3$ y $D = -2/9$. La solución general es

$$x_t = A(-2)^t + B2^t - t/3 - 2/9.$$

Ejemplo 4.7. Hallar la solución de $x_{t+2} - 4x_t = t$ que verifica $x_0 = 0$ y $x_1 = 1/3$.

Solución: La solución general está dada en el ejemplo anterior. Imponiendo las condiciones iniciales, encontramos que las constantes A y B satisfacen el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{ll} A + B + \frac{2}{9} & = 0 \\ -2A + 2B - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} & = \frac{1}{3} \end{array}\right\}.$$

La solución es $A = -2/9$ y $B = 0$. Por tanto, la única sucesión que satisface las condiciones impuestas es

$$x_t = -\frac{2}{9}(-2)^t - \frac{t}{2} + \frac{2}{9}.$$

El método de los coeficientes indeterminados para resolver la ecuación (4.2) se basa en suponer que una solución particular tiene la misma estructura que el término no homogéneo b_t. Este método es muy útil cuando el término no homogéneo es de una de las siguientes formas:

$$a^t, \quad t^m, \quad \cos at, \quad \operatorname{sen} at,$$

o combinaciones lineales de ellas.

Ejemplo 4.8. Resolver la ecuación $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 4^t + t^2 + 3$.

Solución: La ecuación homogénea tiene ecuación característica $r^2 - 5r + 6 = 0$, que tiene dos raíces reales diferentes, $r_{1,2} = 2, 3$. La solución general es $A2^t + B3^t$. Para encontrar una solución particular, buscamos constantes C, D, E y F tal que una solución particular sea

$$x_t^* = C4^t + Dt^2 + Et + F.$$

Al sustituir en la ecuación tenemos la igualdad

$$C4^{t+2} + D(t+2)^2 + E(t+2) + F - 5(C4^{t+1} + D(t+1)^2 + E(t+1) + F) \\ + 6(C4^t + Dt^2 + Et + F) = 4^t + t^2 + 3,$$

que después de algunas manipulaciones se reduce a

$$2C4^t + 2Dt^2 + (-6D + 2E)t + (-D - 3E + 2F) = 4^t + t^2 + 3.$$

Esta igualdad es cierta para todo $t = 0, 1, 2, \ldots$, por lo que

$$\begin{aligned} 2C &= 4, \\ 2D &= 1, \\ -6D + 2E &= 0, \\ -D - 3E + 2F &= 3. \end{aligned}$$

Se sigue que $C = 1/2$, $D = 1/2$, $E = 3/3$ y $F = 4$. La solución general es

$$x_t = A2^t + B3^t + \frac{1}{2}4^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4.$$

Ejemplo 4.9 (Modelo del Multiplicador–Acelerador del Crecimiento)**.** Sea Y_t la renta nacional, C_t el consumo total, y I_t la inversión total de un país en en instante t. Suponemos que para todo $t = 0, 1, 2, \ldots$

(i) $Y_t = C_t + I_t$ (la renta se divide entre consumo e inversión)

(ii) $C_{t+1} = aY_t + b$ (el consumo depende linealmente de la renta del período anterior)

(iii) $I_{t+1} = c(C_{t+1} - C_t)$ (la inversión es proporcional a la variación en el consumo),

donde $a, b, c > 0$.
Determinar una ecuación en diferencias de orden 2 que describa esta economía.

Solución: Eliminamos dos de las incógnitas para obtener una ecuación en diferencias de segundo orden para Y como sigue: de (i) obtenemos (iv) $Y_{t+2} = C_{t+2} + I_{t+2}$. Reemplazando ahora t por $t+1$ en (ii) y en (iii) llegamos a (v) $C_{t+2} = aY_{t+1} + b$ y (vi) $I_{t+2} = c(C_{t+2} - C_{t+1})$, respectivamente. Entonces, insertando (iii) y (v) en (vi) tenemos $I_{t+2} = ac(Y_{t+1} - Y_t)$. Insertando tanto este resultado como (v) en (iv) tenemos $Y_{t+2} = aY_{t+1} + b + ac(Y_{t+1} - Y_t)$ y reagrupando términos llegamos a

$$Y_{t+2} - a(1+c)Y_{t+1} + acY_t = b, \qquad t = 0, 1, \ldots$$

La forma explícita de la solución depende de los coeficientes a, b, c.

5. Sistemas lineales de ecuaciones en diferencias

En este apartado supondremos que las variables dinámicas son vectores, $X_t \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Un *sistema de primer orden de coeficientes constantes* está dado por

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{1,t+1} &=& a_{11}x_{1,t} + \cdots + a_{1n}x_{n,t} + b_{1,t} \\ &\vdots& \\ x_{n,t+1} &=& a_{n1}x_{1,t} + \cdots + a_{nn}x_{n,t} + b_{n,t} \end{array}\right\}.$$

Un ejemplo es

$$\begin{aligned} x_{1,t+1} &= 2x_{1,t} - x_{2,t} + 1 \\ x_{2,t+1} &= x_{1,t} + x_{2,t} + e^{-t}. \end{aligned}$$

Muy a menudo escribiremos estos sistemas omitiendo los subíndices, utilizando letras diferentes para cada una de las componentes del vector X, como por ejemplo

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 2x_t - y_t + 1 \\ y_{t+1} &= x_t + y_t + e^{-t}. \end{aligned}$$

Un sistema lineal puede escribirse en forma matricial:

$$X_{t+1} = AX_t + B_t,$$

donde

$$X_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,t} \\ \vdots \\ b_{n,t} \end{pmatrix}$$

Nos centraremos en el caso en que el término independiente $B_t \equiv B$ es un vector constante.

5.1. Sistemas Homogéneos. Consideramos el sistema homogéneo

$$X_{t+1} = AX_t.$$

Observamos que $X_1 = AX_0$, $X_2 = AX_1 = AAX_0 = A^2X_0$. Por tanto, dado un vector inicial X_0, la solución es

$$X_t = A^tX_0, \quad t = 0, 1, \dots.$$

En el caso en que A sea diagonalizable, $P^{-1}AP = D$ con D diagonal, esta expresión se transforma en

$$X_t = PD^tP^{-1}X_0,$$

que es fácil de computar, dado que D es diagonal.

Ejemplo 5.1. Encontrar la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

Solución: La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$, con raíces $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$. Por tanto, la matriz es diagonalizable. Los subespacios propios son

$$S(3) =< (1,1) >, \qquad S(2) =< (1,2) > .$$

Por tanto, la matriz P, su inversa y la matriz diagonal D son

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y la solución se escribe

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} 2\,3^t - 2^t & -3^t + 2^t \\ 2\,3^t - 2^{t+1} - 1 & -3^t + 2^{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Si la condición inicial es por ejemplo $(x_0, y_0) = (1, 2)$, la solución está dada por

$$\begin{aligned} x_t &= 2\,3^t - 2^t + 2(-3^t + 2^t), \\ y_t &= 2\,3^t - 2^{t+1} - 1 + 2(-3^t + 2^{t+1}). \end{aligned}$$

5.2. Sistemas no homogéneos. Consideramos el sistema

$$X_{t+1} = AX_t + B,$$

donde B es un vector no nulo, independiente de t.
Para obtener la solución, tenemos en cuenta la siguiente recursión:

$$\begin{aligned}
X_1 &= AX_0 + B, \\
X_2 &= AX_1 + B = A(AX_0 + B) + B = A^2X_0 + (A + I_n)B, \\
&\vdots \\
X_t &= AX_{t-1} + B = \cdots = A^tX_0 + (A^{t-1} + A^{t-2} + \cdots + I_n)B. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Dado que, como puede comprobarse realizando el producto,

$$(A^{t-1} + A^{t-2} + \cdots + I_n)(A - I_n) = A^t + A^{t-1} + \cdots + A - A^{t-1} - \cdots - A - I_n = A^t - I_n,$$

si suponemos que la matriz $(A - I_n)$ admite inversa, entonces

$$A^{t-1} + A^{t-2} + \cdots + I_n = (A^t - I_n)(A - I_n)^{-1}.$$

Sustituyendo esta igualdad en la expresión (5.1) para X_t tenemos

$$X_t = A^tX_0 + (A^t - I_n)(A - I_n)^{-1}B.$$

Por otra parte, las soluciones constantes del sistema homogéneo (es decir, los puntos fijos o de equilibrio del sistema) satisfacen

$$X^0 = AX^0 + B.$$

Dado que estamos asumiendo que la matriz $A - I_n$ admite inversa, podemos resolver para X^0

$$(I_n - A)X^0 = B \Rightarrow X^0 = (I_n - A)^{-1}B.$$

En definitiva, podemos escribir la solución del sistema no homogéneo en forma cerrada como

$$X_t = A^tX_0 - (A^t - I_n)X^0 = X^0 + A^t(X_0 - X^0), \qquad (5.2)$$

que permite ver la influencia en la solución tanto de la condición inicial X_0 como del punto de equilibrio, X^0. Por supuesto, en el caso $n = 1$ obtenemos la fórmula del caso escalar ya obtenida en la Sección 3.

Teorema 5.2. *Supongamos que* $|A - I_n| \neq 0$. *Entonces, la solución del sistema no homogéneo está dada por* (5.2). *Además, cuando* A *es diagonalizable, la expresión anterior se reduce a*

$$X_t = X^0 + PD^tP^{-1}(X_0 - X^0), \quad t = 0, 1, \ldots \qquad (5.3)$$

donde $P^{-1}AP = A$ *y* D *es diagonal.*

Demostración. La igualdad (5.3) sigue fácilmente de (5.2), tomando en consideración la identidad $A^t = PD^tP^{-1}$. □

Ejemplo 5.3. Encontrar la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución: EL punto de equilibrio del sistema, X^0, está dada por

$$(I_3 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo anterior ya determinamos la solución general del sistema homogéneo. Por el Teorema 5.2 la solución general del no homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,3^t - 2^t & -3^t + 2^t \\ 2\,3^t - 2^{t+1} - 1 & -3^t + 2^{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - 1/2 \\ y_0 - 5/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}.$$

5.3. Estabilidad de los sistemas lineales. Analizamos en este apartado la estabilidad de los sistemas lineales $X_{t+1} = AX_t + B$ que verifican $|I_n - A| \neq 0$.
Para el comprender el siguiente teorema, es importante recordar que el *módulo* de un número complejo $z = \alpha + \beta i$ es $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Para un número real α el módulo es simplemente el valor absoluto, $|\alpha|$.

Teorema 5.4. *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema $X_{t+1} = AX_t + B$ sea globalmente asintóticamente estable es que las raíces (reales o complejas) del polinomio característico $p_A(\lambda)$ tenga módulo menor que 1. En este caso, cualquier trayectoria converge al punto de equilibrio $X^0 = (I_n - A)^{-1}B$, cuando $t \to \infty$.*

Daremos la prueba sólo en el caso en que A es diagonalizable. La prueba general es más complicada. Como se ha demostrado anteriormente, la solución del sistema no homogéneo cuando A es diagonalizable es

$$X_t = X^0 + PD^tP^{-1}(X_0 - X^0),$$

con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{pmatrix},$$

y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces reales (posiblemente repetidas) de $p_A(\lambda)$. Dado que $|\lambda_j| < 1$ para todo j, los elementos diagonales de D^t tienden a 0 cuando $t \to \infty$, dado que $\lambda_j^t \leq |\lambda_j|^t \to 0$. Por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X^0.$$

Ejemplo 5.5. Estudiar la estabilidad del sistema

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t - \frac{1}{2}y_t + 1, \\ y_{t+1} &= x_t - 1. \end{aligned}$$

Solución: La matriz del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con ecuación característica $\lambda^2 - \lambda + 1/2 = 0$. La raíces son complejas, $\lambda_{1,2} = 1/2 \pm i/2$. El módulo de cualquiera de ellas es (pues son complejos conjugados) $\rho = \sqrt{1/4 + 1/4} = 1/\sqrt{2} < 1$, por lo que el sistema es g.a.e., y el límite de cualquier trayectoria es el punto de equilibrio

$$X^0 = \begin{pmatrix} 1-1 & 0-(-1/2) \\ 0-1 & 1-0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.6. Estudiar la estabilidad del sistema

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= -x_t + y_t, \\ y_{t+1} &= -x_t/2 - y_t/2. \end{aligned}$$

Solución: La matriz del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, con ecuación característica $\lambda^2 - (3/2)\lambda - 1 = 0$. La raíces son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1/2$. El sistema no es estable. Sin embargo, existen condiciones iniciales X_0 tales que la solución converge al punto de equilibrio $X^0 = (0, 0)$. Estas condiciones iniciales estables se determinan a partir de la solución $X_t = PD^tP^{-1}X_0$. Los subespacios propios son $S(2) =< (3,1) >$ y $S(-1/2) =< (2,-1) >$, por tanto

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

De manera que la solución es

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^t\frac{3}{5}(x_0 + 2y_0) + 2^{1-t}\frac{1}{5}(x_0 - 3y_0) \\ 2^t\frac{1}{5}(x_0 + 2y_0) - 2^{-t}\frac{1}{5}(x_0 - 3y_0) \end{pmatrix}.$$

Si las condiciones iniciales (x_0, y_0) satisfacen la relación $x_0 + 2y_0 = 0$, entonces la expresión anterior converge a $(0,0)$ (la parte "explosiva"de la solución desaparece). Por esta razón, la recta $x + 2y = 0$ se llama la *variedad estable*. Observamos que la variedad estable es de hecho el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -1/2$, dado que

$$S(-1/2) =< (2,-1) >= \{x + 2y = 0\}.$$

Cualquier otra condición inicial $(x_0, y_0) \notin S(-1/2)$ genera una solución que no converge a $(0,0)$ (de hecho, que no converge a ningún punto).

Ejemplo 5.7 (Ajuste dinámico en el modelo de Cournot)**.** El propósito de este ejemplo es investigar las condiciones bajo las cuales cierto proceso de ajuste en el duopolio de Cournot converge hacia el equilibrio de Nash del juego estático.
Consideramos un duopolio de Cournot en el que dos empresas, 1 y 2 (los jugadores), producen un bien homogéneo y se enfrentan a unos costes marginales de producción constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$, respectivamente. El precio de mercado P depende linealmente de la cantidad total producida por ambas empresas $Q = q_1 + q_2$

$$P = \alpha - \beta Q, \qquad \alpha > c_i, \quad i = 1,2, \quad \beta > 0.$$

En el duopolio de Cournot cada empresa elige de forma independiente una cantidad q_i para maximizar sus beneficios, tomando como dado (pero desconocido a priori) la cantidad producida por la otra empresa, q_j. El beneficio de la empresa i es

$$\pi_i = q_iP - c_iq_i.$$

Asumiendo que los óptimos son estrictamente positivos, del cálculo elemental sabemos que la condición de maximización para cada uno de los jugadores es[1]

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial q_i}(q_1, q_2) = 0, \qquad i = 1,2,$$

de lo que obtenemos la función de *mejor respuesta* del jugador i, que depende del nivel de producción elegido por la empresa[2] j

$$\mathrm{br}_1 = a_1 - q_2/2, \qquad \mathrm{br}_2 = a_2 - q_1/2,$$

donce $a_i = \dfrac{\alpha - c_i}{2\beta}$, $i = 1,2$. Supondremos $a_1 > a_2/2$ y $a_2 > a_1/2$ para tener cantidades positivas en equilibrio, como mostraremos a continuación. Que $q_1 = \mathrm{br}_1(q_2)$ es mejor respuesta frente a q_2 significa que, si la empresa 2 fija q_2, entonces q_1 maximiza los beneficios de la empresa 1.

[1] Esta condición es también suficiente en este juego puesto que la función de beneficio de cada uno de los jugadores es cóncava con respecto a su propia variable de decisión, es decir, π_1 es cóncava respecto a q_1 y π_2 es cóncava respecto a q_2.

[2] En realidad, la mejor respuesta es $\mathrm{br}_i = \max\{a_i - q_j/2, 0\}$, dado que cantidades negativas no se consideran estrategias admisibles.

El equilibrio de Nash del juego, (q_1^N, q_2^N), es un par de niveles de producción tal que ninguna empresa tiene incentivos a desviarse unilateralmente, es decir, q_i^N es la mejor respuesta del jugador i frente a q_j, $i \neq j$. Por tanto, el equilibrio de Nash es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} q_1^N &= \mathrm{br}_1(q_2^N), \\ q_2^N &= \mathrm{br}_2(q_1^N). \end{aligned}$$

En nuestro modelo

$$\begin{aligned} q_1^N &= a_1 - q_2^N/2, \\ q_2^N &= a_2 - q_2^N/2. \end{aligned}$$

Resolviendo, encontramos

$$\begin{aligned} q_1^N &= \frac{4}{3}\left(a_2 - \frac{a_1}{2}\right), \\ q_2^N &= \frac{4}{3}\left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right), \end{aligned}$$

que son cantidades positivas dadas nuestras hipótesis. Por ejemplo, si el juego es simétrico, es decir, $c_1 = c_2 = c$, entonces $a_1 = a_2 = \dfrac{\alpha - c}{2\beta}$ y el equilibiro de Nash es el par

$$\begin{aligned} q_1^N &= \frac{\alpha - c}{3\beta}, \\ q_2^N &= \frac{\alpha - c}{3\beta}. \end{aligned}$$

Para ser más específicos, supongamos que $\alpha = 11$, $c = 2$ y $\beta = 1$. Entonces la teoría recomienda jugar el par de cantidades $(3, 3)$, que generan unos beneficios de

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi = 3 \cdot P(3+3) - 2 \cdot 3 = 3(11 - 6) - 6 = 9 \text{ u.m.}$$

Si cualquiera de los duopolistas produce otra cantidad $q \neq 3$ mientras el otro continúa jugando 3, el que se desvía sólo puede reducir su beneficio.
En lo que sigue consideramos el modelo general, asimétrico, e introducimos una componente dinámica. Supondremos que las empresas no eligen su producción de Nash instantáneamente, sino que ajustan de manera gradual su producción q_i hacia la mejor respuesta br_i en cada período t como se especifica a continuación:

$$(5.4) \qquad \begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1,t} + d_1(\mathrm{br}_{1,t} - q_{1,t}) = q_{1,t} + d_1(a_1 - \frac{1}{2}q_{2,t} - q_{1,t}), \\ q_{2,t+1} = q_{1,t} + d_2(\mathrm{br}_{2,t} - q_{2,t}) = q_{2,t} + d_2(a_2 - \frac{1}{2}q_{1,t} - q_{2,t}), \end{cases}$$

donde d_1 y d_2 son constantes positivas. El objetivo es estudiar si este proceso de ajuste converge hacia el equilibrio de Nash del juego.
Para simplificar la notación introducimos nuevas variable $x = q_1$ y $y = q_2$. Reagrupando términos el sistema (5.4) es

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1 - d_1)x_t - \frac{d_1}{2}y_t + d_1 a_1, \\ y_{t+1} = (1 - d_2)y_t - \frac{d_2}{2}x_t + d_2 a_2. \end{cases}$$

El punto fijo o equilibrio del sistema satisface

$$\begin{cases} x = (1 - d_1)x - \frac{d_1}{2}y + d_1 a_1, \\ y = (1 - d_2)y - \frac{d_2}{2}x + d_2 a_2. \end{cases}$$

La única solución es precisamente el equilibrio de Nash definido más arriba,

$$(x^N, y^N) = \left(\frac{4}{3}\left(a_2 - \frac{a_1}{2}\right), \frac{4}{3}\left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right)\right).$$

¿Bajo qué condiciones este ajuste progresivo de la producción convergerá al equilibrio de Nash? Como ya sabemos, esto depende del hecho de que el módulo de los valores propios del sistema sea menor que 1. La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1-d_1 & -\frac{d_1}{2} \\ -\frac{d_2}{2} & 1-d_2 \end{pmatrix}$$

Para simplificar el análisis, supondremos que la velocidad del ajuste es el mismo para ambos jugadores, $d_1 = d_2 = d$. Los valores propios en este caso son

$$\lambda_1 = 1 - \frac{d}{2}, \qquad \lambda_2 = 1 - \frac{3d}{2}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} |\lambda_1| < 1 \quad &\text{sii} \quad 0 < d < 4, \\ |\lambda_2| < 1 \quad &\text{sii} \quad 0 < d < 4/3, \end{aligned}$$

por tanto, $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$ sii $0 < d < 4/3$. Es decir, $0 < d < 4/3$ es condición necesaria y suficiente para la convergencia hacia el equilibrio de Nash desde cualquier condición inicial (sistema g.a.e.).

6. Ecuaciones no lineales de primer orden

Estudiamos la estabilidad de la ecuación no lineal, de primer orden y autónoma

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, \ldots,$$

donde $f : I \to I$ es no lineal y I es un intervalo de la recta real. Supondremos que f es de clase C^1. Recordamos que una función f es de *clase* C^1 en un intervalo abierto si f' existe y es continua en dicho intervalo. Por ejemplo, las funciones x^2, $\cos x$ o e^x son de clase C^1 en $\mathbb{R}$, pero $|x|$ no es derivable en 0, por lo que no es C^1 en ningún intervalo que contenga 0.

Teorema 6.1. *Sea $x^0 \in I$ un punto fijo de f, y supongamos que f es C^1 en un intervalo abierto con centro x^0, $I_\delta = (x^0 - \delta, x^0 + \delta)$.*

1. *Si $|f'(x^0)| < 1$, entonces x^0 es localmente asintóticamente estable;*
2. *Si $|f'(x^0)| > 1$, entonces x^0 es inestable.*

Demostración. Dado que f' es continua en I_δ y $f'(x^0) < 1$, existe algún intervalo abierto $I_\delta = (x^0 - \delta, x^0 + \delta)$ y un número positivo $k < 1$ tal que $|f'(x)| \le k$ para todo $x \in I_\delta$.

1. Por el teorema del valor medio (también llamado Teorema de Lagrange), existe algún c en el segmento con extremos x_0 y x^0 tal que

$$f(x_0) - f(x^0) = f'(c)(x_0 - x^0),$$

o

$$x_1 - x^0 = f'(c)(x_0 - x^0),$$

dado que $x^0 = f(x^0)$ por definición de punto fijo. Consideramos una condición inicial $x_0 \in I_\delta$. Entonces c es un elemento de I_δ y, por tanto, tomando valor absoluto en la igualdad anterior tenemos

$$|x_1 - x^0| = |f'(c)||x_0 - x^0| \le k|x_0 - x^0|. \tag{6.1}$$

Por otra parte, $|x_1 - x^0| \le k\delta < \delta$, luego $x_1 \in I_\delta$. Razonando de la misma manera, tenemos

$$|x_2 - x^0| = |f(x_1) - x^0| = |f'(c)||x_1 - x^0| \le k|x_1 - x^0| \le k^2|x_0 - x^0|.$$

donde c es un número del segmento de extremos x_1 y x^0 que está incluído en I_δ (luego $|f'(c)| \le k$). Continuando de esta forma, tenemos que después de t pasos

$$|x_t - x^0| \le k^t|x_0 - x^0| \to 0, \qquad \text{as } t \to \infty.$$

Luego x_t converge al punto fijo x^0 cuando $t \to \infty$, por lo que x^0 es l.a.e.

2. Si $|f'(x^0)| > 1$, de nuevo por continudiad de f', existen $\delta > 0$ y $K > 1$ tales que $|f'(x)| > K$ para cualquier $x \in I_\delta$. La ecuación (6.1) establece

$$|x_1 - x^0| = |f'(c)||x_0 - x^0| > K|x_0 - x^0|$$

y después de t pasos

$$|x_t - x^0| > K^t|x_0 - x^0|.$$

Dado que K^t tiende a ∞ cuando $t \to \infty$, x_t se aleja de x_0 en cada período, por lo que el punto fijo x^0 es inestable.

□

Observación 6.2. Si $|f'(x)| < 1$ para cada $x \in I$, entonces el punto fijo x^0 es globalmente asintóticamente estable.

Ejemplo 6.3 (Modelos de crecimiento de la población)**.** El modelo de Malthus de crecimiento de una población supone que la población x crece a una tasa constante r, es decir,

$$\frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = r, \qquad \text{o} \qquad x_{t+1} = (1+r)x_t.$$

Esta es una ecuación en diferencias lineal y de primer orden, en la que la solución (la población), crece de manera no acotada si la tasa de crecimiento per capita r es positiva[3]. Este comportamiento no es realista para t grande. Cuando la población es pequeña, existen recursos suficientes para soportar una tasa de nacimientos elevada, pero a medida que el tiempo pasa y la población crece, debe haber una alta tasa de mortalidad debido a la competencia entre individuos por el espacio y la comida. Por tanto, la tasa de crecimiento per capita de la población debería ser decreciente a medida que la población aumenta, y no constante como postula el modelo de Malthus. El caso más simple es suponer una tasa de crecimiento per capita que sea linealmente decreciente, es decir,

$$\text{tasa de crecimiento cuando la población es } x\text{: } r(x) = r\left(1 - \frac{x}{M}\right),$$

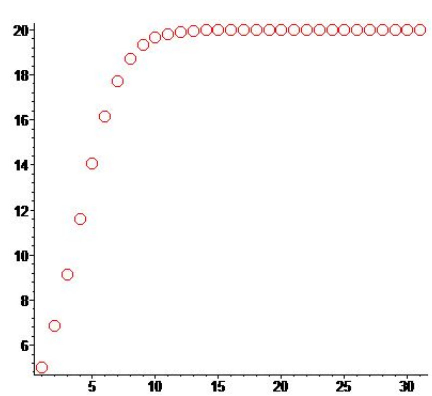
donce M es el nivel máximo sostenible de población (si $x > M$, entonces la población decrece, puesto que $r(x) < 0$). El modelo que surge se conoce como *ley de Verhulst*. La población evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$x_{t+1} = x_t\left(1 + r - \frac{r}{M}x_t\right),$$

que es no lineal. De hecho, la función f es cuadrática,

$$f(x) = x\left(1 + r - \frac{r}{M}x\right).$$

En la Fig. 6.3 se representa una trayectoria solución cuando $x_0 = 5$, $r = 0{,}5$ y $M = 20$.



[3]La solución es $x_t = (1+r)^t x_0$, ¿por qué?

Nótese que la solución converge hacia $x^0 = 20$. Existen dos punto fijos de la ecuación, 0 (extinción) y $x^0 = M$ (máximo nivel sostenible de población). Considerando la derivada de f en cada uno de estos puntos, tenemos

$$f'(0) = 1 + r - 2\frac{r}{M}x\Big|_{x=0} = 1 + r > 1,$$
$$f'(M) = 1 + r - 2\frac{r}{M}x\Big|_{x=M} = 1 - r.$$

De acuerdo al Teorema 6.1, el punto de equilibiro 0 es inestable, pero M es localmente asintóticamente estable sii $|1 - r| < 1$, o $0 < r < 2$.

6.1. Diagrama de Fases. La estabilidad de los puntos fijos de la ecuación

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, \dots,$$

puede estudiarse mediante un método gráfico conocido como *diagrama de fases*. Este consiste en dibujar la gráfica de la función $y = f(x)$ en el plano xy, junto con la recta $y = x$. Notar que un punto fijo x^0 corresponde al punto de la diagonal del primer y tercer cuadrante (x^0, x^0), donde la gráfica de $y = f(x)$ intercepta a la recta $y = x$. El diagrama de fases muestra, junto con las gráficas anteriores, los pares

$$(x_0, 0), (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_2, x_3),$$

unidos mediante segmentos.
Las siguientes figuras muestran distintas configuraciones posibles alrededor de un punto fijo. El diagrama de fases se muestra a la izquierda en cada figura (en el plano xy) y la trayectoria solución correspondiente a la derecha (en el plano tx). Observar que hemos dibujado las soluciones como curvas continuas porque ello facilita comprender el carácter de la solución, pero en realidad la solución es una sucesión, es decir, un conjunto de puntos aislados (también resaltados en el gráfico mediante círculos de mayor tamaño).
En la Fig. 4, $f'(x^0)$ es positiva, y la sucesión es creciente $x_0, x_1, \dots$ y converge de forma monótona hacia el punto fijo x^0, mientras que en la Fig. 5, $f'(x^0)$ es negativa, por lo que puede observarse un comportamiento oscilante, como en los modelos de la telaraña estudiados anteriormente, pues la sucesión $x_0, x_1, \dots$ converge hacia x^0 pero alternando valores alrededor del punto de equilibrio. En la Fig. 6, la gráfica de f próxima a x^0 es demasiado inclinada para obtener convergencia. después de varias iteraciones en el diagrama de fases podemos observar un comportamiento errático en la solución $x_0, x_1, \dots$. No hay ciclos y dos sucesiones generadas a partir de condiciones iniciales parecidas se alejan a medida que aumenta t, a una tasa exponencial (ver Teorema 6.1 para una justificación de esta afirmación). En la literatura se dice que la sucesión es caótica. Finalmente, la Fig. 7 es el diagrama de fases de una ecuación que admite un ciclo de período 3.

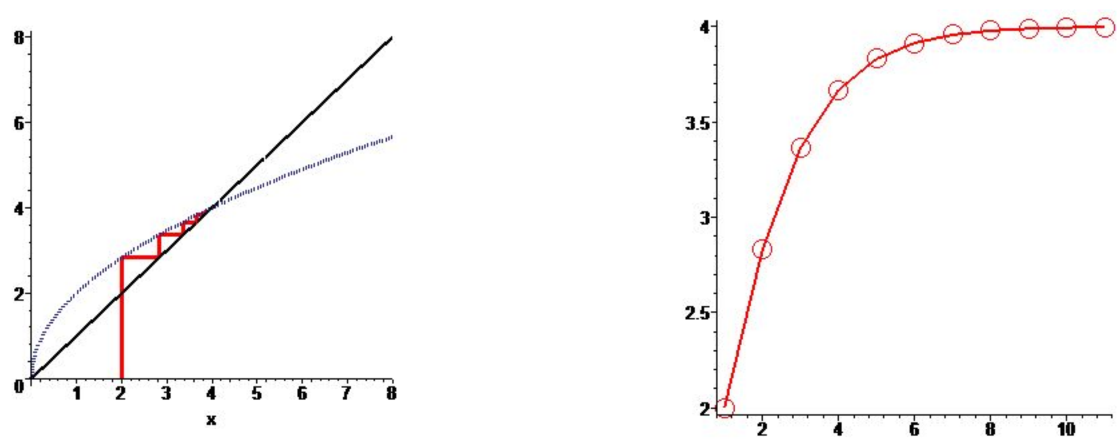


Figura 4. x^0 estable, $f'(x^0) \in (0, 1)$

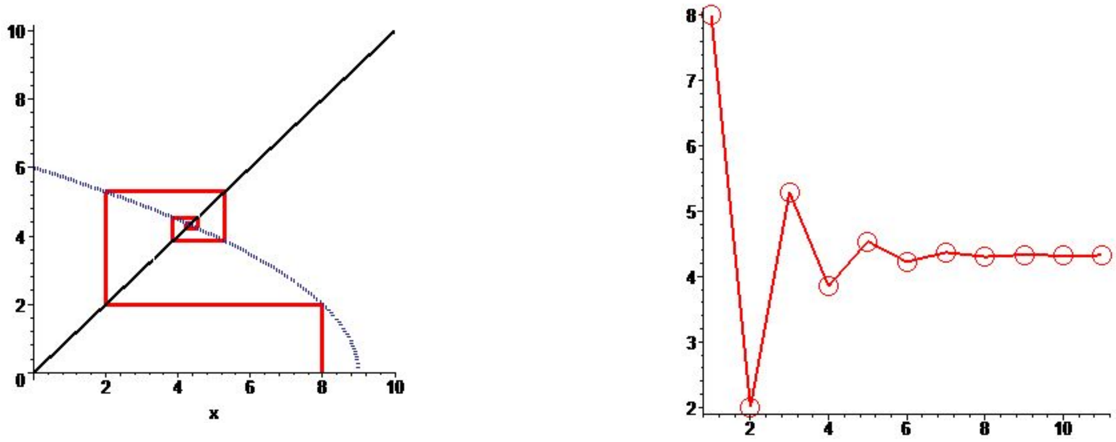


Figura 5. x^0 estable, $f'(x^0) \in (-1, 0)$

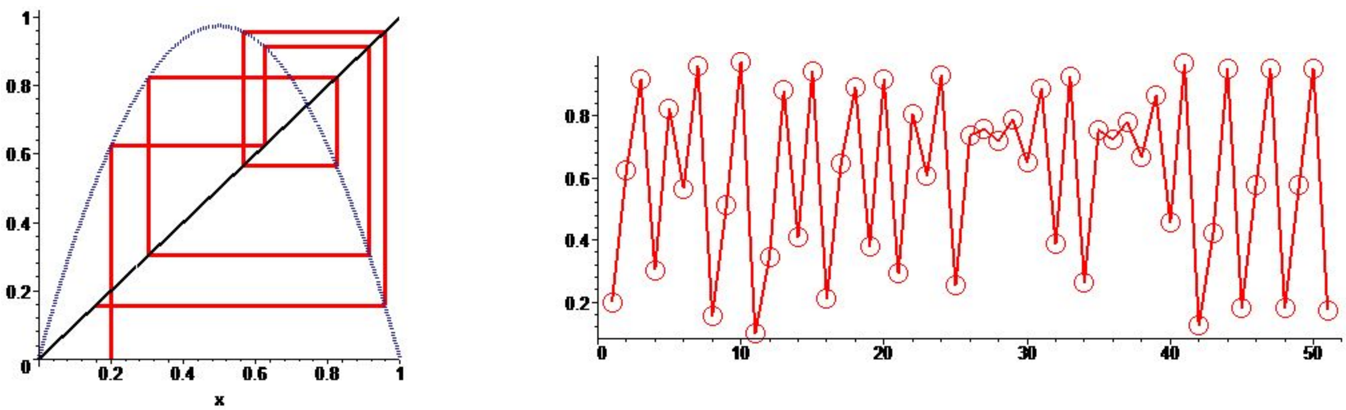


Figura 6. x^0 inestable, $|f'(x^0)| > 1$

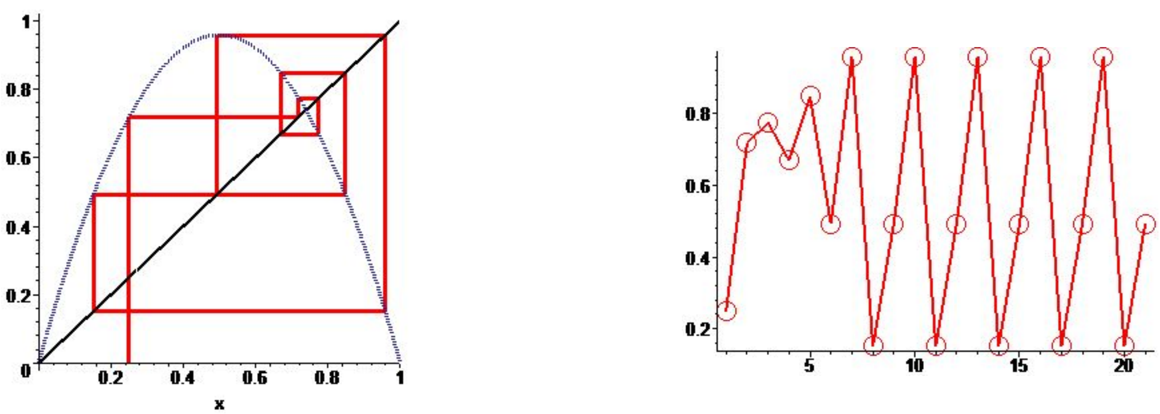


Figura 7. Un ciclo de período 3

*