4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Matilde Machado

para bajar las transparencias:

http://www.eco.uc3m.es/~mmachado/

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Ejemplos de diferenciación horizontal:

- Playa y vendedores de helados - En cada extremo de la playa hay un vendedor de helados. Aunque venden los mismos helados los consumidores no son indiferentes entre los dos. Prefieren comprar al vendedor que está más cerca. Hay costes de transporte.

Reinterpretación de la distancia:

- Características de los productos. Ejemplo Cereales y su dulzor. Cereales pueden tener mucho azúcar o poco. Podemos ordenar todos los cereales en una línea de dulzor (playa). Consumidores tienen gustos (localizaciones) diferentes para el dulzor y si no hay diferencias de precios prefieren comprar los cereales cercanos a su gusto.

4.3. La ciudad Lineal - Introducción

Más ejemplos de diferenciación horizontal:

- Renault Scenic blanco y Renault Scenic rojo
- Localización espacial – Farmácias - “Regulación de las Oficinas de Farmácia: Precios y Libertad de Entrada” Walter García Fontes y Massimo Motta
- ¿Que más homogéneo que el agua? El caso de aguas de diseño. – Margenes altas.

Brand	Price per Half-Liter Bottle	Source	1997 Sales
Aqua Fina	\$0.59–\$0.69	purified tap water	\$ 60 million
Crystal Geyser	\$1.00	springs in California & Tennessee	\$115 million
Evian	\$0.99–\$1.09	spring in the French Alps	\$185 million
Sparkletts Plain	\$1.99 per six pack	wells in California and Texas	\$181 million
Poland Spring	\$1.39	spring in Maine	\$300 million

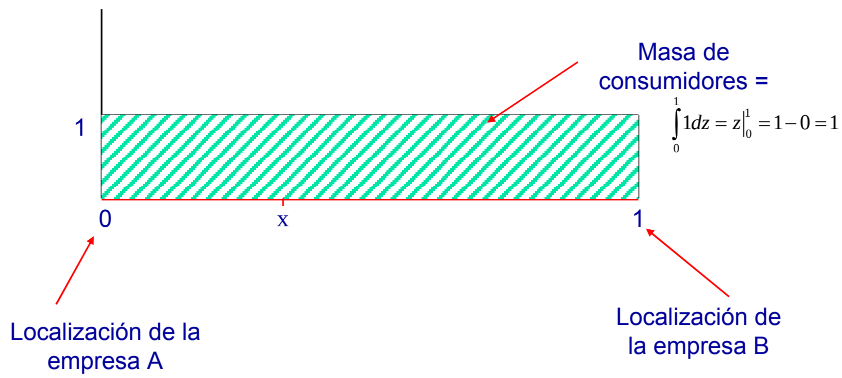
4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

El modelo:

1. “Ciudad lineal” es el intervalo [0,1]
2. Los consumidores están distribuidos uniformemente a lo largo de este intervalo.
3. Hay 2 empresas, localizadas a cada extremo que venden el mismo bien. La única diferencia entre las empresas es su localización.
4. c= coste de 1 unidad del bien
5. t= coste de transporte por unidad de distancia al cuadrado. Este coste es soportado por los consumidores cuando eligen una empresa o la otra. Representa el valor del tiempo, gasolina, etc.
6. Los consumidores tienen demandas unitarias o compran 1 unidad o ninguna {0,1}

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Gráficamente



4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Los costes de transporte del consumidor x:

- De comprar en la empresa A son tx^2
- De comprar en la empresa B son $(1-x)^2 t$

- s ≡ excedente bruto del consumidor - (es decir su máxima disponibilidad a pagar)
- Supongamos que s es lo suficientemente grande para que el mercado esté cubierto, es decir para que todos los consumidores del intervalo puedan comprar. La utilidad de cada consumidor es por tanto dada por:
- U = s-p-td^2

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Tomamos las localizaciones de las empresas como dadas y compiten en precios.

1. Derivación de las curvas de demanda

2. Problema de optimización en precios y equilibrio

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

El consumidor indiferente entre comprar en la tienda A o B se situa en $\tilde{x}$

$\tilde{x}$ se define como el punto donde $U_{\tilde{x}}(A) = U_{\tilde{x}}(B)$

$$\Leftrightarrow s - p_A - t\tilde{x}^2 = s - p_B - t(1-\tilde{x})^2$$

$$\Leftrightarrow p_A + t\tilde{x}^2 = p_B + t(1-\tilde{x})^2$$

$$\Leftrightarrow p_A + t\tilde{x}^2 = p_B + t + t\tilde{x}^2 - 2t\tilde{x}$$

$$\Leftrightarrow 2t\tilde{x} = p_B - p_A + t$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tilde{x} = \frac{p_B - p_A + t}{2t}}$$

Compran a A | Compran a B

$\underline{A}$ $\tilde{x}$ $\underline{B}$

Si $(p_B - p_A)\uparrow$ el consumidor indiferente se mueve hacia la derecha, es decir aumenta la demanda de la empresa A y disminuye la demanda de la empresa B

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Una vez que sabemos cual es el consumidor indiferente podemos definir las funciones de demanda de las empresas A y B.

$$D_A(p_A, p_B) = \int_0^{\tilde{x}} 1dz = z\Big|_0^{\tilde{x}} = \tilde{x} = \frac{p_B - p_A + t}{2t}$$

$$D_B(p_A, p_B) = \int_{\tilde{x}}^{1} 1dz = z\Big|_{\tilde{x}}^{1} = 1 - \tilde{x} = 1 - \frac{p_B - p_A + t}{2t} = \frac{p_A - p_B + t}{2t}$$

La demanda de la empresa A por ejemplo depende positivamente de la diferencia de precios (p_B-p_A) y negativamente de los costes de transporte. Si las dos empresas colocan el mismo precio p_B=p_A entonces se reparten el mercado en partes iguales (el consumidor indiferente se situa en ½).

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Decimos que el mercado está cubierto cuando el consumidor indiferente quiere comprar, es decir:

$$s - p_A - t\left(\frac{p_B - p_A + t}{2t}\right)^2 \geq 0$$

Los beneficios de las empresas son:

$$\Pi^A(p_A, p_B) = (p_A - c)D_A(p_A, p_B) = (p_A - c)\frac{p_B - p_A + t}{2t}$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

El problema de la empresa A, por ejemplo, es:

$$\underset{p_A}{Max}\,\Pi^A(p_A,p_B)=(p_A-c)D_A(p_A,p_B)=(p_A-c)\frac{p_B-p_A+t}{2t}$$

$$\text{CPO: }\frac{\partial\Pi^A}{\partial p_A}=0\Leftrightarrow\frac{p_B-p_A+t}{2t}-\frac{1}{2t}(p_A-c)=0$$

$$\Leftrightarrow p_B-2p_A+t+c=0\Leftrightarrow \boxed{p_A=\frac{p_B+t+c}{2}}$$

Curva de reacción de la empresa A

Como el problema es simétrico $\Rightarrow p_A=p_B=p^*$

$$p^*=\frac{p^*+t+c}{2}\Leftrightarrow\frac{p^*}{2}=\frac{t+c}{2}\Leftrightarrow\boxed{p^*=t+c}$$

Cuando t=0 volvemos a Bertrand p=c; $\Pi^*=0$*

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Una vez que tenemos los precios de equilibrio podemos calcular todas las cantidades de equilibrio:

$$\tilde{x}^*=\frac{1}{2}$$

$$D_A(p_A^*,p_B^*)=\tilde{x}^*=\frac{1}{2}$$

$$D_B(p_A^*,p_B^*)=1-\tilde{x}^*=\frac{1}{2}=D_A(p_A^*,p_B^*)$$

$$\Pi^{A*}=\Pi^{B*}=(p^*-c)D_A^*=(t+c-c)\tilde{x}^*=\frac{t}{2}$$

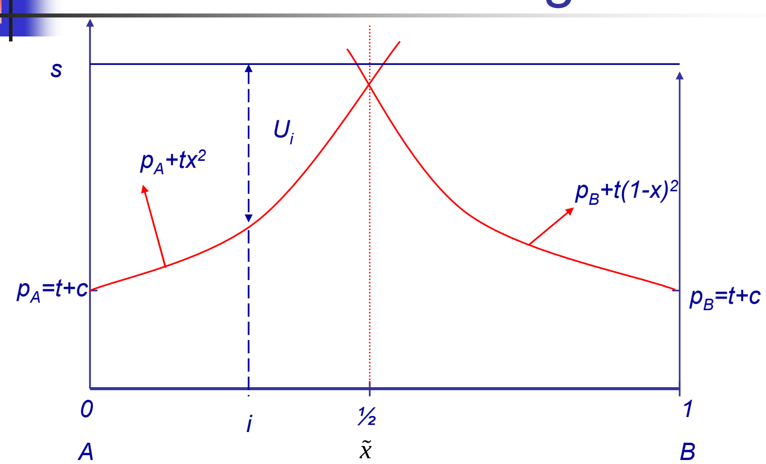
Nota: cuanto mayor es t más diferenciado está el bien desde el punto de vista de los consumidores, mayor es el poder de mercado, los clientes que están más cerca están más cautivos porque les sale muy caro irse hasta la otra empresa. Esto permite aumentar el precio de equilibrio y los beneficios. Cuando t=0 (no hay diferenciación) volvemos a Bertrand

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Observaciones:

- Cada empresa sirve a medio mercado $D^*_A=D^*_B=1/2$
- La paradoja de Bertrand desaparece $p_A=p_B>c$
- Un aumento de t implica más diferenciación de productos. Por lo tanto las empresas compiten con menos vigor y obtienen beneficios mayores.
- t=0 volvemos a Bertrand

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling



El consumidor compra al vendedor que le salga más barato incluyendo el coste de transporte

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Como cambian los precios cuando cambian las localizaciones de A y B?

- Si A=0 y B=1 hay máxima diferenciación
- Si A=B= $\hat{x}$ Todos los consumidores comprarán al que tenga el precio más barato, volvemos a Bertrand,

  $p_A=p_B=c$ y $\Pi_A=\Pi_B=0$.

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Caso General – localizaciones endógenas:

2 periodos:

- En el primer periodo las empresas seleccionan localización
- En el segundo periodo las empresas compiten en precios dada su localización

Se resuelve hacia atrás.

Empezamos por el segundo periodo.

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Segundo periodo:

- La localización de la empresa A está en *a* $\in[0,1]$
- La localización de la empresa B está (1-b) $\in[0,1]$

Nota: La máxima diferenciación sería con *a*=0;
y 1-b=1 (es decir b=0)
la mínima diferenciación (sustitutos perfectos) sería con a=1-b ⇔a+b=1

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

1. El consumidor indiferente: $U_{\tilde{x}}(A)=U_{\tilde{x}}(B)$

$$p_A+t(\tilde{x}-a)^2 = p_B+t(\tilde{x}-(1-b))^2$$

$$\Leftrightarrow p_A+t\tilde{x}^2+ta^2-2t\tilde{x}a = p_B+t\tilde{x}^2+t(1-b)^2-2t\tilde{x}(1-b)$$

$$\Leftrightarrow 2t\tilde{x}\left(1-b-a\right) = p_B-p_A+t(1-b)^2-ta^2$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}=\frac{p_B-p_A+t(1-b)^2-ta^2}{2t\left(1-b-a\right)}=\frac{p_B-p_A+t\left((1-b)^2-a^2\right)}{2t\left(1-b-a\right)}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}=\frac{p_B-p_A}{2t\left(1-b-a\right)}+\frac{\left(1-b-a\right)\left(1-b+a\right)}{2\left(1-b-a\right)}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}=\frac{p_B-p_A}{2t\left(1-b-a\right)}+\frac{\left(1-b+a\right)}{2}=\frac{p_B-p_A}{2t\left(1-b-a\right)}+\frac{\left(1-b-a\right)}{2}+a$$

Por tanto si p_A=p_B la demanda de A es a+(1-b-a)/2

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Las demandas son:

$$D_A(p_A, p_B) = \tilde{x} = \frac{p_B - p_A}{2t(1-b-a)} + \frac{(1-b-a)}{2} + a$$

$$D_B(p_A, p_B) = 1 - \tilde{x} = 1 - \frac{p_B - p_A}{2t(1-b-a)} - \frac{(1-b-a)}{2} - a$$

$$= \frac{p_A - p_B}{2t(1-b-a)} + \frac{1-b-a}{2} + b$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Interpretación de las funciones de demanda:

si $p_A = p_B$

$$D_A(p_A, p_B) = \underbrace{a}_{\substack{\text{consumidores} \\ \text{cautivos,} \\ \text{a su izquierda}}} + \underbrace{\frac{(1-b-a)}{2}}_{\substack{\text{mitad de los consumidores} \\ \text{entre a y 1-b}}}$$

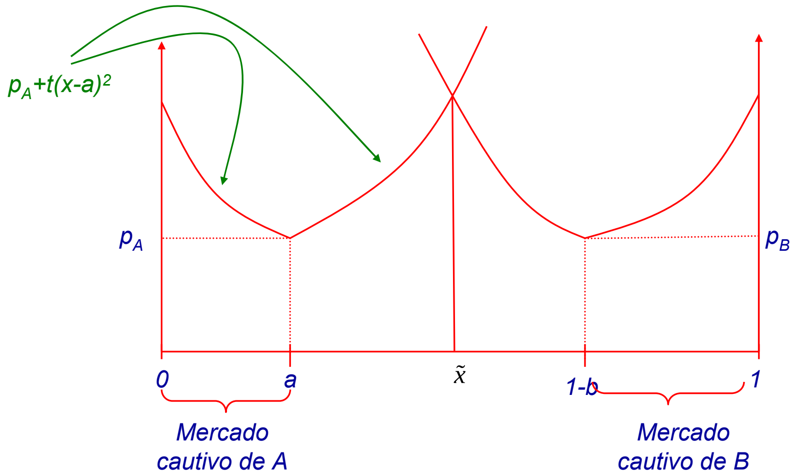
$$D_B(p_A, p_B) = \underbrace{\frac{1-b-a}{2}}_{\substack{\text{mitad de los consumidores} \\ \text{entre a y 1-b}}} + \underbrace{b}_{\substack{\text{consumidores} \\ \text{cautivos, a su} \\ \text{derecha}}}$$

si $p_A \neq p_B$

$$D_A(p_A, p_B) = a + \frac{(1-b-a)}{2} + \underbrace{\frac{p_B - p_A}{2t(1-b-a)}}_{\substack{\text{sensibilidad de la demanda} \\ \text{frente a la diferencia de precios}}}$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Gráficamente



4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

2. Encontrar las funciones de reacción

$$\underset{p_A}{Max}\,\Pi^A=(p_A-c)D_A(p_A,p_B)=(p_A-c)\left(a+\frac{(1-b-a)}{2}+\frac{p_B-p_A}{2t(1-b-a)}\right)$$

$$\text{CPO:}\frac{\partial\Pi^A}{\partial p_A}=0\Leftrightarrow a+\frac{(1-b-a)}{2}+\frac{p_B-p_A}{2t(1-b-a)}+(p_A-c)\left(-\frac{1}{2t(1-b-a)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2p_A}{2t(1-b-a)}=a+\frac{(1-b-a)}{2}+\frac{p_B+c}{2t(1-b-a)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{p_A}{t(1-b-a)}=a+\frac{(1-b-a)}{2}+\frac{p_B+c}{2t(1-b-a)}$$

$$\Leftrightarrow\boxed{p_A=at(1-b-a)+\frac{t(1-b-a)^2}{2}+\frac{p_B+c}{2}}$$

Función de reacción

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

2. Encontrar las funciones de reacción

$$\underset{p_B}{Max}\,\Pi^B = (p_B - c) D_B(p_A, p_B) = (p_B - c)\left(b + \frac{(1-b-a)}{2} + \frac{p_A - p_B}{2t(1-b-a)}\right)$$

$$\text{CPO:} \frac{\partial \Pi^B}{\partial p_B} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b + \frac{(1-b-a)}{2} + \frac{p_A - p_B}{2t(1-b-a)} + (p_B - c)\left(-\frac{1}{2t(1-b-a)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow b + \frac{(1-b-a)}{2} + \frac{p_A - 2p_B + c}{2t(1-b-a)} = 0$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

2. Encontrar las funciones de reacción (cont.)

$$b + \frac{(1-b-a)}{2} + \frac{-2p_B + c}{2t(1-b-a)} + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1-b-a}{2} + \frac{p_B + c}{2t(1-b-a)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3p_B + 3c}{4t(1-b-a)} + b + \frac{(1-b-a)}{2} + \frac{1}{2}a + \frac{1-b-a}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3p_B}{4t(1-b-a)} = \frac{3c}{4t(1-b-a)} + \frac{b}{4} + \frac{3}{4} - \frac{a}{4}$$

$$\Leftrightarrow p_B = c + \frac{t(3+b-a)(1-b-a)}{3}$$

$$= c + t(1-b-a)\left(1 + \frac{b-a}{3}\right) \quad \text{y} \quad p_A = c + t(1-b-a)\left(1 + \frac{a-b}{3}\right)$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

2. Encontrar las funciones de reacción (cont.)

$$p_B^*(a,b) = c + t(1-b-a)\left(1+\frac{b-a}{3}\right) \quad \text{y} \quad p_A^*(a,b) = c + t(1-b-a)\left(1+\frac{a-b}{3}\right)$$

Los precios son máximos cuando la diferenciación es máxima (a=b=0; $p_A=p_B=c+t$) y mínimos cuando la diferenciación es mínima (a+b=1 (misma localización) y $p_A=p_B=c$)

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

3. 1er periodo, elección simultanea de a y b

Los beneficios son:

$$\Pi^A(a,b) = \left(p_A^*(a,b)-c\right)D_A(a,b,\, p_A^*(a,b),\, p_B^*(a,b))$$

$$\Pi^B(a,b) = \left(p_B^*(a,b)-c\right)D_B(a,b,\, p_A^*(a,b),\, p_B^*(a,b))$$

$p_A^*(a,b), p_B^*(a,b), D_A^*(a,b), D_B^*(a,b)$

Se sustituye y nos quedamos con una función solamente de a y b. Sacamos las CPO como siempre.

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

3. 1er periodo, elección simultanea de a y b

$$\Pi^A(a,b)=\left(c+t\left(1-a-b\right)\left(1+\frac{a-b}{3}\right)-c\right)\left(\frac{p_B^*-p_A^*}{2t(1-a-b)}+\frac{1-b-a}{2}+a\right)$$

pero $p_B^*-p_A^*=2t(1-a-b)\left(\frac{b-a}{3}\right)$

lo que simplifica:

$$\Pi^A(a,b)=\left(t\left(1-a-b\right)\underbrace{\left(1+\frac{a-b}{3}\right)}_{=\left(\frac{3+a-b}{3}\right)}\right)\left(\underbrace{\frac{b-a}{3}+\frac{1-b+a}{2}}_{\frac{3-b+a}{6}}\right)=t\left(1-a-b\right)\frac{\left(3-b+a\right)^2}{18}$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

3. 1er periodo, elección simultanea de a y b

$$\underset{a}{Max}\,\Pi^A(a,b)=t\left(1-a-b\right)\frac{\left(3-b+a\right)^2}{18}$$

$$\text{CPO:}\frac{\partial\Pi^A(a,b)}{\partial a}=-t\frac{\left(3-b+a\right)^2}{18}+t\left(1-a-b\right)\frac{2\left(3-b+a\right)}{18}$$

$$=-\frac{t}{18}\left(3-b+a\right)\left(1+b+3a\right)<0\Rightarrow a^*=0$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

3. 1er periodo, elección simultanea de a y b

$$\underset{b}{Max}\,\Pi^{B}(a,b)=t\left(1-a-b\right)\frac{\left(3+b-a\right)^{2}}{18}$$

$$\text{CPO:}\frac{\partial\Pi^{B}(a,b)}{\partial b}=-t\frac{\left(3+b-a\right)^{2}}{18}+t\left(1-a-b\right)\frac{2\left(3+b-a\right)}{18}$$

$$=-\frac{t}{18}\left(3+b-a\right)\left(1+3b+a\right)<0\Rightarrow b^{*}=0\Leftrightarrow 1-b^{*}=1$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

Conclusión: Las empresas se colocan en los extremos, eligen máxima diferenciación.

Para la empresa A por ejemplo, un aumento de a (movimiento hacia la derecha) :

- Tiene un efecto positivo (efecto demanda)
- Tiene un efecto negativo (efecto competencia)
- Si los costes de transporte son cuadráticos el efecto competencia es más fuerte que el efecto demanda y las empresas prefieren máxima diferenciación.

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

La solución socialmente óptima es la que minimiza los costes de transporte y sería a=1/4 y 1-b=3/4. Por tanto desde el punto de vista social hay demasiado diferenciación del producto cuando el mercado es privado.

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

El problema del planificador social:

- Excedente del consumidor x es:
  - $s-t(x-a)^2-p_A$ si compra en A
  - $s-t(x-(1-b))^2-p_B$ si compra en B
- Por cada consumidor el vendedor gana
  - p_A-c empresa A
  - p_B-c empresa B
- Los precios son pura transferencia entre consumidores y productores, el excedente total asociado al consumidor x es:
  - $s-t(x-a)^2-p_A+p_A-c= s-t(x-a)^2-c$ si compra en A
  - $s-t(x-(1-b))^2-p_B+p_B-c= s-t(x-(1-b))^2-c$ si compra en B

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

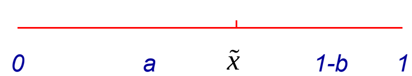
Para saber el máximo social tenemos que derivar el consumidor indiferente:

$$
\begin{aligned}
& s - t(\tilde{x} - a)^2 - c = s - t(\tilde{x} - (1-b))^2 - c \\
& \Leftrightarrow (\tilde{x} - a)^2 = (\tilde{x} - (1-b))^2 \\
& \Leftrightarrow \tilde{x}^2 + a^2 - 2a\tilde{x} = \tilde{x}^2 + (1-b)^2 - 2(1-b)\tilde{x} \\
& \Leftrightarrow a^2 - 2a\tilde{x} = (1-b)^2 - 2(1-b)\tilde{x} \\
& \Leftrightarrow 2\tilde{x}\left[1-b-a\right] = (1-b)^2 - a^2 \\
& \Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{(1-b-a)(1-b+a)}{2\left(1-b-a\right)} = \frac{(1-b+a)}{2} = \text{mitad de la distancia entre a y 1-b}
\end{aligned}
$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

El monopolista tiene que max el beneficio social que es lo mismo que minimizar los costes de transporte

$$
\underset{a,b}{Min} \underbrace{\int_0^a t(a-z)^2 dz + \int_a^{\tilde{x}=\frac{1-b+a}{2}} t(z-a)^2 dz}_{\text{compran a A}} + \underbrace{\int_{\tilde{x}=\frac{1-b+a}{2}}^{1-b} t((1-b)-z)^2 dz + \int_{1-b}^{1} t(z-(1-b))^2 dz}_{\text{compran a B}}
$$



4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

$$\underset{a,b}{Min}\underbrace{\int_0^a t(a-z)^2\,dz+\int_a^{\tilde{x}=\frac{1-b+a}{2}} t(z-a)^2\,dz}_{\text{compran a A}}+\underbrace{\int_{\tilde{x}=\frac{1-b+a}{2}}^{1-b} t((1-b)-z)^2\,dz+\int_{1-b}^{1} t(z-(1-b))^2\,dz}_{\text{compran a B}}$$

$$\Leftrightarrow \underset{a,b}{Min}\left[-\frac{(a-z)^3}{3}\bigg|_0^a+\frac{(z-a)^3}{3}\bigg|_a^{\frac{1-b+a}{2}}-\frac{(1-b-z)^3}{3}\bigg|_{\frac{1-b+a}{2}}^{1-b}+\frac{(z-(1-b))^3}{3}\bigg|_{1-b}^{1}\right]$$

$$\Leftrightarrow \underset{a,b}{Min}\left[\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1-b-a}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{1-b-a}{2}\right)^3+\frac{b^3}{3}\right]$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

$$\underset{a,b}{Min}\left[\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1-b-a}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{1-b-a}{2}\right)^3+\frac{b^3}{3}\right]$$

La CPO:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial a}=0\Leftrightarrow 4a^2-(1-b-a)^2=0 \quad \text{(A)}\\ \dfrac{\partial}{\partial b}=0\Leftrightarrow 4b^2-(1-b-a)^2=0 \quad \text{(B)}\end{cases}$$

(A)-(B):

$$4a^2-4b^2=0\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow a=b$$

lo que sustituyendo en (A) implica que:

$$4a^2-(1-a-a)^2=0\Leftrightarrow a^*=\frac{1}{4};(1-b^*)=\frac{3}{4}$$

4.3. La ciudad Lineal – Modelo de Hotelling

La conclusión básica del modelo de Hotelling es el principio de diferenciación: las empresas quieren diferenciarse lo máximo posible para disminuir la competencia en precios.

Por veces puede que haya fuerzas que se oponen a la diferenciación y que incluso pueden llevar a diferenciación mínima:

1) Las empresas pueden querer estar donde está la demanda (i.e. en el centro)
2) En caso de ausencia de competencia en precios (por ejemplo por que los precios están regulados) puede llevar a las empresas a localizarse en el centro y repartirse el mercado a medias.