# 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

Matilde Machado



## 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

Hasta ahora hemos supuesto que las empresas interactuan solo una vez. En realidad las empresas se enfrentan repetidamente. Mecanismos como reputación y represalias solo se pueden analizar en un modelo de interacción repetida. Vamos a ver que este tipo de modelo ofrece otra solución a la paradoja de Bertrand.

## 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

Consideramos el modelo estándar de Bertrand pero suponemos que en vez de elegir sus precios solo una vez las empresas escogen precios en T > 1 periodos. Este tipo de situación puede llevar a una situación de colusión tácita es decir no explicita entre los oligopolistas.

Supuestos:

- Las empresas venden productos homogéneos.
- Tienen el mismo coste marginal constante c y ningún coste fijo.
- No existen restricciones de capacidad.
- Las empresas se encuentran en el mercado en T > 1 periodos. En cada periodo t $\in\{1, \ldots, T\}$ las empresas eligen sus precios $p_{t1}$ y $p_{t2}$ simultaneamente y no–cooperativamente.



## 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

La demanda que enfrenta la empresa i en el periodo t es igual a las demandas de Bertrand:

$$D_{it}(p_{it}, p_{jt}) = \begin{cases} D_t(p_{it}) & \text{si } p_{it} < p_{jt} \text{ capta toda la demanda del mercado} \\ \frac{1}{2} D_t(p_{it}) & \text{si } p_{it} = p_{jt} \text{ (o cualquier otra cantidad)} \\ 0 & \text{si } p_{it} > p_{jt} \text{ pierde toda la demanda} \end{cases}$$

Y los beneficios del periodo t son:

$$\Pi_t^i(p_{it}, p_{jt}) = (p_{it} - c) D_{it}(p_{it}, p_{jt})$$

$\delta$ es el factor de descuento de cada periodo.

## 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

Dado que tenemos T periodos el problema del oligopolista es
Maximizar el beneficio total=

$$\Pi^i\left(p_i, p_j\right)=\sum_{t=1}^{T}\delta^t\Pi_t^i(p_{it}, p_{jt}) \text{ donde } p_i=\left(p_{i1}, p_{i2}, \dots p_{iT}\right), p_j=\left(p_{j1}, p_{j2}, \dots p_{jT}\right)$$



## 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

CASO I: Horizonte Finito (T<∞):

El único equilibrio perfecto en subjuegos es que ambas las empresas coloquen $p_{1t}=p_{2t}=c$ en todos los periodos t.

Prueba: Por inducción hacia atrás:

Empezamos en el último periodo, el periodo T. Este periodo, es exactamente igual al juego de Bertrand es decir al juego estático, ya que solamente queda 1 periodo, el beneficio de las empresas solamente depende de sus acciones en ese periodo y no podremos penalizar nuestros rivales. $p_{1T}=p_{2T}=c$.

En el periodo T-1 las empresas saben que en el periodo T solamente va valer el equilibrio de Bertrand, es decir que en el periodo T no van a penalizar ninguna acción que se haya tomado en el periodo T-1. Los precios elegidos en el periodo T-1 solamente van a afectar los beneficios del periodo T-1 luego es como el caso estático. El único equilibrio que vale es el del modelo estático. $p_{1T-1}=p_{2T-1}=c$.

Y así hasta el primer periodo … el juego de Bertrand es repetido T+1 veces, no se soluciona la paradoja de Bertrand.

# 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

CASO II: Horizonte Infinito (T=∞):

1) Es fácil verificar que la repetición del equilibrio estático del juego de Bertrand en cada periodo t es también un equilibrio del juego infinito.

Prueba: Cada empresa elige $p_{1t}=p_{2t}=c$ es decir independientemente de la historia del juego hasta ese periodo t. Dado que la rival pone $p_2=c$, la mejor respuesta de la empresa 1 es $p_1=c$ y vice-versa. Es decir $p_1=(c,c,c,\ldots c..)$ y $p_2=(c,c,c\ldots c..)$ son un equilibrio.

2) El equilibrio repetido de Bertrand ya no es el único equilibrio. Va existir un equilibrio donde los precios son superiores al coste marginal.



# 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

CASO II: Horizonte Infinito (T=∞) (cont.):

Alguna notación:

$p^M$=precio de monopolio es decir el que maximiza $\Pi=(p-c)D(p)$

$\Pi^M$=beneficio del monopolista en 1 periodo.

$H_t=(p_{10},p_{20};p_{11},p_{21};\ldots\ldots;p_{1t-1},p_{2t-1})$ es la história del juego hasta el periodo t

Supongamos la siguiente estrategia de gatillo ("trigger strategy") o estratégia de penalización:

$$p_{it}(H_t)=\begin{cases} p^M & \text{si } H_{it}=\varnothing \text{ o si } H_{it}=(p^M,p^M;p^M,p^M;\ldots.p^M,p^M) \\ c & \text{para cualquier otra história} \end{cases}$$

*Penalización en el caso que la empresa j se desvíe del equilibrio de cooperación. Una desviación en un periodo induce a una penalización para siempre*

# 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

CASO II: Horizonte Infinito (T=∞) (cont.):

Si $H_t \neq (p^M,p^M;p^M,p^M;\ldots\ldots;p^M,p^M)$ ambas las empresas juegan c (el equilibrio estatico de Bertrand) para siempre y esto (siempre) es un equilibrio en subjuegos.

Si $H_t = (p^M,p^M;p^M,p^M;\ldots\ldots;p^M,p^M)$ entonces la empresa puede o continuar la estratégia de cooperación (dada la estratégia del rival) en cuyo caso los beneficios son:

$$\frac{\Pi^M}{2}+\delta\frac{\Pi^M}{2}+\delta^2\frac{\Pi^M}{2}+\ldots.=\frac{1}{1-\delta}\frac{\Pi^M}{2}$$

Si me desvío de la estrategia de cooperación entonces la mejor desviación es poner $p^M-\varepsilon$ y ganar todo el mercado. Los beneficios serían:

$$\underbrace{\Pi^M}_{\substack{\text{beneficio}\\ \text{en el periodo}\\ \text{en que se}\\ \text{produce la}\\ \text{desviación}}}+\underbrace{0+0+\ldots}_{\substack{\text{penalización}\\ \text{para siempre.}\\ \text{aqui los precios}\\ \text{son iguales a c}}}=\Pi^M$$



# 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

CASO II: Horizonte Infinito (T=∞) (cont.):

Las empresas no tendrán incentivo a desviarse si:

$$\frac{1}{1-\delta}\frac{\Pi^M}{2}\geq\Pi^M$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1-\delta}\frac{1}{2}\geq 1\Leftrightarrow\frac{1}{1-\delta}\geq 2\Leftrightarrow 2(1-\delta)\leq 1\Leftrightarrow\boxed{\delta\geq\frac{1}{2}}$$

Es decir si las empresas valoran suficientemente el futuro.

Conclusión: si las empresas valoran el futuro lo suficiente (es decir δ>1/2) entonces es posible mantener el equilibrio de colusión.

# 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

CASO II: Horizonte Infinito (T=∞) (cont.):

Nota: En realidad se puede demostrar que cualquier precio entre c y $p^M$ se puede sostener para un dado valor de $\delta$>1/2. Por ejemplo:

consideremos un $p \in \left[c, p^M\right]$ y la estrategia de gatillo anterior

$\Pi(p) \equiv$ beneficio del monopolista al cobrar $p$

Si la empresa colabora, el beneficio es:

$$\frac{\Pi(p)}{2} + \delta \frac{\Pi(p)}{2} + \delta^2 \frac{\Pi(p)}{2} + .... = \frac{1}{1-\delta} \frac{\Pi(p)}{2}$$

Si la empresa no colabora, coloca un precio p'=p-$\varepsilon$ y gana:

$$\Pi(p) + 0 + 0 + .... = \Pi(p)$$

Luego la empresa colabora siempre que:

$$\boxed{\frac{1}{1-\delta} \frac{\Pi(p)}{2} \geq \Pi(p) \Leftrightarrow 1-\delta \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{2}}$$



# 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

CASO II: Horizonte Infinito (T=∞) (cont.):

Nota: La forma más simple de garantizar un dado precio es penalizar lo más severamente posible. En este contexto la peor penalización es regresar al equilibrio estático, (eq. de Bertrand) donde los beneficios son cero. Para que la penalización sea creíble tiene que ser un equilibrio posible. En equilibrio no se observa la penalización.

# 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

CASO III: Horizonte Infinito (T=∞) y n empresas:

En este caso la empresa i coopera si y solamente si:

$$\frac{\Pi^M}{n}\left(\frac{1}{1-\delta}\right) \ge \Pi^M \Leftrightarrow 1-\delta \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow \delta \ge 1-\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Es decir cuando aumenta el numero de empresas ↑n el valor de δ necesario para sostener la colaboración es más alto, por lo tanto va ser cada vez más dificil sostener la colaboración.

La intuición es que como la ganancia de desviarse es más grande (se gana todo el mercado en vez de repartirlo entre n) mientras que la penalización es cada vez más pequeña (la diferencia entre el beneficio de colaboración y el coste marginal es más pequeña)

$$\frac{\Pi^M}{n}\left[1+\delta+\delta^2+...\right] \ge \Pi^M \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\Pi^M}{n}\left[\delta+\delta^2+...\right]}_{\substack{=\frac{\Pi^M}{n}\frac{\delta}{1-\delta}=\text{penalización,}\\ \text{lo que se deja de ganar}}} \ge \underbrace{\Pi^M - \frac{\Pi^M}{n}}_{\text{ganancia de desviarse}}$$



# 3.7. Colusión Tácita: juegos repetidos

Nota: La colusión es más probable cuando:

- hay pocas empresas
- La probabilidad de la detección de una desviación es grande
- Las empresas se enfrentan en múltiples mercados