Economía de la Información

Curso 2008–2009

Capítulo 1
Introducción. Juegos repetidos

Economía de la Información

Curso 2008–2009

Juegos repetidos Infinitas etapas

- Cuando $T = +\infty$ (el juego de etapa G se juega infinitas veces) las ganancias del jugador i no pueden ser la suma de las ganancias en cada juego

$$u_1^i + u_2^i + \cdots + u_t^i + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} u_t^i$$

ya que la serie diverge (no suma un número finito) en la mayoría de las ocasiones interesantes.

- Introducimos un factor de descuento δ y las ganancias de $G(\infty, \delta)$ son las sumas descontadas de las ganancias de todos los juegos de etapa

$$u_1^i + \delta u_2^i + \delta^2 u_2^i + \cdots + \delta^{t-1} u_t^i + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_t^i$$

- Interpretación del factor de descuento

$$\delta = \frac{1}{1+r}$$

donde r es la tasa de interés.

- Interpretación del factor de descuento

$$\delta = \frac{1}{1+r}$$

  donde r es la tasa de interés.

- Para los cálculos que siguen debemos tener en cuenta que si $0 \leq \delta < 1$ entonces,

$$1 + \delta + \delta^2 + \cdots \delta^n = \frac{1 - \delta^{n-1}}{1 - \delta}$$

$$1 + \delta + \delta^2 + \cdots \delta^n + \cdots = \frac{1}{1 - \delta}$$

Proposición

Si el juego se repite infinitamente, aunque el juego de etapa G sólo tenga un único ENPS, puede existir un ENPS del juego repetido $G(\infty, \delta)$ en el que para ningún t, el resultado de la etapa t es el EN de G.

- Vamos a ilustrar esta idea con el dilema del prisionero,

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Vamos a ilustrar esta idea con el dilema del prisionero,

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- La estrategia sería la siguiente **estrategia del 'disparador'**:
    - En la primera etapa jugar C.

- Vamos a ilustrar esta idea con el dilema del prisionero,

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- La estrategia sería la siguiente **estrategia del 'disparador'**:
  - En la primera etapa jugar C.
  - En la étapa t: si el resultado de todas las etapas anteriores ha sido (C, C), entonces jugar C. En cualquier otro caso, jugar NC.

- Vamos a ilustrar esta idea con el dilema del prisionero,

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- La estrategia sería la siguiente **estrategia del 'disparador'**:
  - En la primera etapa jugar C.
  - En la étapa t: si el resultado de todas las etapas anteriores ha sido (C, C), entonces jugar C. En cualquier otro caso, jugar NC.
- Si ambos jugadores siguen la estrategia del disparador en el juego repetido, en cada etapa se juega (C, C).

- Vamos a ilustrar esta idea con el dilema del prisionero,

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- La estrategia sería la siguiente **estrategia del 'disparador'**:
  - En la primera etapa jugar C.
  - En la étapa t: si el resultado de todas las etapas anteriores ha sido (C, C), entonces jugar C. En cualquier otro caso, jugar NC.
- Si ambos jugadores siguen la estrategia del disparador en el juego repetido, en cada etapa se juega (C, C).
- Vamos a demostrar que si δ es lo suficientemente cercano a 1 (es decir si los agentes son lo 'suficientemente pacientes'), entonces la estrategia del disparador es un EN del juego repetido un número infinito de etapas.

- Supongamos que el agente i juega la estrategia del disparador y veamos cuál es la mejor respuesta del agente $j \neq i$.

- Supongamos que el agente i juega la estrategia del disparador y veamos cuál es la mejor respuesta del agente $j \neq i$.
- Supongamos que el agente j está pensando en jugar NC en la etapa $t \in \{0, 1, \ldots\}$ y que hasta ese momento ha cooperado. Es decir, t es la primera etapa en la que j no coopera.

- Supongamos que el agente i juega la estrategia del disparador y veamos cuál es la mejor respuesta del agente $j \neq i$.
- Supongamos que el agente j está pensando en jugar NC en la etapa $t \in \{0, 1, \ldots\}$ y que hasta ese momento ha cooperado. Es decir, t es la primera etapa en la que j no coopera.
- A partir de ese momento el agente i jugará NC en todas las etapas posteriores

$$t + 1, t + 2, \cdots$$

Como NC es la estrategia del agente i en el EN, la mejor respuesta del agente j es

- Supongamos que el agente i juega la estrategia del disparador y veamos cuál es la mejor respuesta del agente $j \neq i$.
- Supongamos que el agente j está pensando en jugar NC en la etapa $t \in \{0, 1, \ldots\}$ y que hasta ese momento ha cooperado. Es decir, t es la primera etapa en la que j no coopera.
- A partir de ese momento el agente i jugará NC en todas las etapas posteriores

$$t+1, t+2, \cdots$$

  Como NC es la estrategia del agente i en el EN, la mejor respuesta del agente j es NC.

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Las ganancias del jugador j serían

$$\underbrace{4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} +$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Las ganancias del jugador *j* serían

$$\underbrace{4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \underbrace{5\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} +$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Las ganancias del jugador j serían

$$\underbrace{4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \underbrace{5\delta^t}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{\delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}}$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Las ganancias del jugador j serían

$$\underbrace{4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \underbrace{5\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{\delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}}$$

- Esto es igual a

$$u_{nc} = 4(1 + \delta + \cdots \delta^{t-1}) +$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Las ganancias del jugador j serían

$$\underbrace{4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \underbrace{5\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{\delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}}$$

- Esto es igual a

$$u_{nc} \quad = \quad 4(1 + \delta + \cdots \delta^{t-1}) + 5\delta^{t} +$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Las ganancias del jugador j serían

$$\underbrace{4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \underbrace{5\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{\delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}}$$

- Esto es igual a

$$u_{nc} \quad = \quad 4(1 + \delta + \cdots \delta^{t-1}) + 5\delta^{t} + \delta^{t+1}(1 + \delta + \delta^{2} + \cdots)$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Las ganancias del jugador j serían

$$\underbrace{4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \underbrace{5\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{\delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}}$$

- Esto es igual a

$$\begin{aligned} u_{nc} &= 4(1 + \delta + \cdots \delta^{t-1}) + 5\delta^{t} + \delta^{t+1}(1 + \delta + \delta^{2} + \cdots) \\ &= \frac{4(1-\delta^{t})}{1-\delta} + \end{aligned}$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Las ganancias del jugador j serían

$$\underbrace{4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \underbrace{5\delta^t}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{\delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}}$$

- Esto es igual a

$$\begin{aligned} u_{nc} &= 4(1 + \delta + \cdots \delta^{t-1}) + 5\delta^t + \delta^{t+1}(1 + \delta + \delta^2 + \cdots) \\ &= \frac{4(1-\delta^t)}{1-\delta} + 5\delta^t + \end{aligned}$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Las ganancias del jugador j serían

$$\underbrace{4+4\delta+\cdots 4\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \underbrace{5\delta^t}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{\delta^{t+1}+\delta^{t+2}+\cdots}_{\text{resto etapas}}$$

- Esto es igual a

$$\begin{aligned} u_{nc} &= 4(1+\delta+\cdots\delta^{t-1})+5\delta^t+\delta^{t+1}(1+\delta+\delta^2+\cdots) \\ &= \frac{4(1-\delta^t)}{1-\delta}+5\delta^t+\frac{\delta^{t+1}}{1-\delta} \end{aligned}$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Mientras que si el jugador j sigue también la estrategia del disparador, en todas las etapas se juega

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Mientras que si el jugador j sigue también la estrategia del disparador, en todas las etapas se juega (C, C) y los pagos son

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Mientras que si el jugador j sigue también la estrategia del disparador, en todas las etapas se juega (C, C) y los pagos son

$$\begin{aligned} u_c &= 4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1} \qquad + 4\delta^t + \qquad 4\delta^{t+1} + 4\delta^{t+2} + \cdots \\ &= \frac{4(1-\delta^t)}{1-\delta} + \end{aligned}$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Mientras que si el jugador j sigue también la estrategia del disparador, en todas las etapas se juega (C, C) y los pagos son

$$\begin{aligned} u_c &= 4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1} \qquad + 4\delta^t + \qquad 4\delta^{t+1} + 4\delta^{t+2} + \cdots \\ &= \frac{4(1-\delta^t)}{1-\delta} + 4\delta^t + \end{aligned}$$

	NC	C
NC	1, 1	5,0
C	0,5	4,4

- Mientras que si el jugador j sigue también la estrategia del disparador, en todas las etapas se juega (C, C) y los pagos son

$$
\begin{aligned}
u_c &= 4 + 4\delta + \cdots 4\delta^{t-1} \qquad + 4\delta^t + \qquad 4\delta^{t+1} + 4\delta^{t+2} + \cdots \\
&= \frac{4(1-\delta^t)}{1-\delta} + 4\delta^t + \frac{4\delta^{t+1}}{1-\delta}
\end{aligned}
$$

- Restando vemos que

- Restando vemos que

$$u_c - u_{nc} = -\delta^t + \frac{3\delta^{t+1}}{1-\delta}$$

por lo que $u_c - u_{nc} \geq 0$ si

$$\frac{3\delta^{t+1}}{1-\delta} \geq \delta^t$$

- Restando vemos que

$$u_c - u_{nc} = -\delta^t + \frac{3\delta^{t+1}}{1-\delta}$$

por lo que $u_c - u_{nc} \geq 0$ si

$$\frac{3\delta^{t+1}}{1-\delta} \geq \delta^t$$

- Dividiendo por δ^t esto es lo mismo que

$$\frac{3\delta}{1-\delta} \geq 1$$

- Restando vemos que

$$u_c - u_{nc} = -\delta^t + \frac{3\delta^{t+1}}{1-\delta}$$

por lo que $u_c - u_{nc} \geq 0$ si

$$\frac{3\delta^{t+1}}{1-\delta} \geq \delta^t$$

- Dividiendo por δ^t esto es lo mismo que

$$\frac{3\delta}{1-\delta} \geq 1$$

- es decir, el agente no se desvía si $3\delta \geq 1 - \delta$,

- Restando vemos que

$$u_c - u_{nc} = -\delta^t + \frac{3\delta^{t+1}}{1-\delta}$$

por lo que $u_c - u_{nc} \geq 0$ si

$$\frac{3\delta^{t+1}}{1-\delta} \geq \delta^t$$

- Dividiendo por δ^t esto es lo mismo que

$$\frac{3\delta}{1-\delta} \geq 1$$

- es decir, el agente no se desvía si $3\delta \geq 1 - \delta$, o lo que es lo mismo si

$$\delta \geq \frac{1}{4}$$

- Hemos probado que si $\delta \geq 1/4$ entonces la estrategia del disparador es un EN en el juego repetido infinitas veces.

- Hemos probado que si $\delta \geq 1/4$ entonces la estrategia del disparador es un EN en el juego repetido infinitas veces. ¿Es también un ENPS?

- Hemos probado que si $\delta \geq 1/4$ entonces la estrategia del disparador es un EN en el juego repetido infinitas veces. ¿Es también un ENPS?
- Cuando los jugadores tienen ambos un factor de descuento δ, al juego de etapa G repetido infinitas veces lo llamaremos $G(\infty, \delta)$.

- Hemos probado que si $\delta \geq 1/4$ entonces la estrategia del disparador es un EN en el juego repetido infinitas veces. ¿Es también un ENPS?
- Cuando los jugadores tienen ambos un factor de descuento δ, al juego de etapa G repetido infinitas veces lo llamaremos $G(\infty, \delta)$.
- Todos los subjuegos de $G(\infty, \delta)$ son de la forma:

- Hemos probado que si $\delta \geq 1/4$ entonces la estrategia del disparador es un EN en el juego repetido infinitas veces. ¿Es también un ENPS?
- Cuando los jugadores tienen ambos un factor de descuento δ, al juego de etapa G repetido infinitas veces lo llamaremos $G(\infty, \delta)$.
- Todos los subjuegos de $G(\infty, \delta)$ son de la forma: Dada una historia del juego, se empieza a jugar repetidamente el juego G en alguna etapa t.

- Hemos probado que si $\delta \geq 1/4$ entonces la estrategia del disparador es un EN en el juego repetido infinitas veces. ¿Es también un ENPS?
- Cuando los jugadores tienen ambos un factor de descuento δ, al juego de etapa G repetido infinitas veces lo llamaremos $G(\infty, \delta)$.
- Todos los subjuegos de $G(\infty, \delta)$ son de la forma: Dada una historia del juego, se empieza a jugar repetidamente el juego G en alguna etapa t.
- El subjuego que comienza en la etapa t es idéntico al juego original $G(\infty, \delta)$, excepto en que todos los pagos están descontados δ^t.

- Cada subjuego G_1 de $G(\infty, \delta)$ lo clasificamos en dos tipos, según en la etapa t en que comience el subjuego G_1.

- Cada subjuego G_1 de $G(\infty, \delta)$ lo clasificamos en dos tipos, según en la etapa t en que comience el subjuego G_1.
  - En todas las etapas anteriores al comienzo del subjuego G_1 se ha jugado (C, C).

- Cada subjuego G_1 de $G(\infty, \delta)$ lo clasificamos en dos tipos, según en la etapa t en que comience el subjuego G_1.
  - En todas las etapas anteriores al comienzo del subjuego G_1 se ha jugado (C, C). En este caso, el razonamiento de antes demuestra que el único EN de G_1 es la estrategia del disparador.

- Cada subjuego G_1 de $G(\infty, \delta)$ lo clasificamos en dos tipos, según en la etapa t en que comience el subjuego G_1.
  - En todas las etapas anteriores al comienzo del subjuego G_1 se ha jugado (C, C). En este caso, el razonamiento de antes demuestra que el único EN de G_1 es la estrategia del disparador.
  - Juegos en los que en alguna etapa anterior no se ha jugado (C, C).

- Cada subjuego G_1 de $G(\infty, \delta)$ lo clasificamos en dos tipos, según en la etapa t en que comience el subjuego G_1.
  - En todas las etapas anteriores al comienzo del subjuego G_1 se ha jugado (C, C). En este caso, el razonamiento de antes demuestra que el único EN de G_1 es la estrategia del disparador.
  - Juegos en los que en alguna etapa anterior no se ha jugado (C, C). En este caso, el otro agente está jugando NC por lo que la mejor respuesta es NC, que coincide con la estrategia del disparador.

- Cada subjuego G_1 de $G(\infty, \delta)$ lo clasificamos en dos tipos, según en la etapa t en que comience el subjuego G_1.
  - En todas las etapas anteriores al comienzo del subjuego G_1 se ha jugado (C, C). En este caso, el razonamiento de antes demuestra que el único EN de G_1 es la estrategia del disparador.
  - Juegos en los que en alguna etapa anterior no se ha jugado (C, C). En este caso, el otro agente está jugando NC por lo que la mejor respuesta es NC, que coincide con la estrategia del disparador.
- Por tanto, si $\delta \geq 1/4$ entonces la estrategia del disparador es un ENPS.

- Cada subjuego G_1 de $G(\infty, \delta)$ lo clasificamos en dos tipos, según en la etapa t en que comience el subjuego G_1.
    - En todas las etapas anteriores al comienzo del subjuego G_1 se ha jugado (C, C). En este caso, el razonamiento de antes demuestra que el único EN de G_1 es la estrategia del disparador.
    - Juegos en los que en alguna etapa anterior no se ha jugado (C, C). En este caso, el otro agente está jugando NC por lo que la mejor respuesta es NC, que coincide con la estrategia del disparador.
- Por tanto, si $\delta \geq 1/4$ entonces la estrategia del disparador es un ENPS.
- Hay otros muchos ENPS (Teorema de Friedman o Folk Theorem).

Ejemplo: Colusión en un modelo de Cournot

- Consideremos dos empresas que se enfrentan a la función de demanda

$$P(Q) = 10 - Q$$

Ejemplo: Colusión en un modelo de Cournot

- Consideremos dos empresas que se enfrentan a la función de demanda

$$P(Q) = 10 - Q$$

con

$$Q = q_1 + q_2$$

Ejemplo: Colusión en un modelo de Cournot

- Consideremos dos empresas que se enfrentan a la función de demanda

$$P(Q) = 10 - Q$$

con

$$Q = q_1 + q_2$$

y q_i es la producción de la empresa $i = 1, 2$.

Ejemplo: Colusión en un modelo de Cournot

- Consideremos dos empresas que se enfrentan a la función de demanda

$$P(Q) = 10 - Q$$

con

$$Q = q_1 + q_2$$

y q_i es la producción de la empresa $i = 1, 2$.

- La función de coste de cada empresa es $c(q) = q$.

Ejemplo: Colusión en un modelo de Cournot

- Consideremos dos empresas que se enfrentan a la función de demanda

$$P(Q) = 10 - Q$$

con

$$Q = q_1 + q_2$$

y q_i es la producción de la empresa $i = 1, 2$.

- La función de coste de cada empresa es $c(q) = q$.
- Podemos modelar la situación como un juego en el que los jugadores son las empresas $N = \{1, 2\}$,

Ejemplo: Colusión en un modelo de Cournot

- Consideremos dos empresas que se enfrentan a la función de demanda

$$P(Q) = 10 - Q$$

con

$$Q = q_1 + q_2$$

y q_i es la producción de la empresa $i = 1, 2$.

- La función de coste de cada empresa es $c(q) = q$.
- Podemos modelar la situación como un juego en el que los jugadores son las empresas $N = \{1, 2\}$, las estrategias para la empresa $i = 1, 2$ es su producción $q_i \in [0, \infty)$

Ejemplo: Colusión en un modelo de Cournot

- Consideremos dos empresas que se enfrentan a la función de demanda

$$P(Q) = 10 - Q$$

con

$$Q = q_1 + q_2$$

y q_i es la producción de la empresa $i = 1, 2$.

- La función de coste de cada empresa es $c(q) = q$.
- Podemos modelar la situación como un juego en el que los jugadores son las empresas $N = \{1, 2\}$, las estrategias para la empresa $i = 1, 2$ es su producción $q_i \in [0, \infty)$ y las funciones de utilidad son los beneficios

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2) &= q_1(10 - q_1 - q_2) - q_1 = q_1(9 - q_1 - q_2) \\ u_2(q_1, q_2) &= q_2(10 - q_1 - q_2) - q_2 = q_2(9 - q_1 - q_2) \end{aligned}$$

- Supongamos que la empresa 2 elige la producción q_2.

- Supongamos que la empresa 2 elige la producción q_2.
- La mejor respuesta de la empresa 1 está determinada por

- Supongamos que la empresa 2 elige la producción q_2.
- La mejor respuesta de la empresa 1 está determinada por

$$\max_{q_1} q_1(9 - q_1 - q_2)$$

- La CPO es $9 - 2q_1 - q_2 = 0$ por lo que la mejor respuesta de la empresa 1 es

$$q_1(q_2) = \frac{9 - q_2}{2}$$

- Supongamos que la empresa 2 elige la producción q_2.
- La mejor respuesta de la empresa 1 está determinada por

$$\max_{q_1} q_1(9 - q_1 - q_2)$$

- La CPO es $9 - 2q_1 - q_2 = 0$ por lo que la mejor respuesta de la empresa 1 es

$$q_1(q_2) = \frac{9 - q_2}{2}$$

- Análogamente, la mejor respuesta de la empresa 1 es

$$q_2(q_1) = \frac{9 - q_1}{2}$$

- en el EN se verifica que

$$
\begin{aligned}
2q_1 &= 9 - q_2 \\
2q_2 &= 9 - q_1
\end{aligned}
$$

- en el EN se verifica que

$$\begin{aligned} 2q_1 &= 9 - q_2 \\ 2q_2 &= 9 - q_1 \end{aligned}$$

- La solución de este sistema de ecuaciones lineales es

$$q_1^{\mathrm{EN}} = q_2^{\mathrm{EN}} = 3$$

- en el EN se verifica que

$$\begin{aligned} 2q_1 &= 9 - q_2 \\ 2q_2 &= 9 - q_1 \end{aligned}$$

- La solución de este sistema de ecuaciones lineales es

$$q_1^{\text{EN}} = q_2^{\text{EN}} = 3$$

- las utilidades que los agentes obtienen en el EN es

$$u_1^{\text{EN}} = u_2^{\text{EN}} = 9$$

- El EN de Nash es ineficiente. Los agentes pueden alcanzar un resultado mejor para ambos si cooperan.

- El EN de Nash es ineficiente. Los agentes pueden alcanzar un resultado mejor para ambos si cooperan.
- Si en lugar de dos empresas hubiera un monopolio con función de coste $c(Q) = Q$, este maximizaría

- El EN de Nash es ineficiente. Los agentes pueden alcanzar un resultado mejor para ambos si cooperan.
- Si en lugar de dos empresas hubiera un monopolio con función de coste $c(Q) = Q$, este maximizaría

$$\max_{Q} Q(10 - Q) - Q = Q(9 - Q)$$

- El EN de Nash es ineficiente. Los agentes pueden alcanzar un resultado mejor para ambos si cooperan.
- Si en lugar de dos empresas hubiera un monopolio con función de coste $c(Q) = Q$, este maximizaría

$$\max_{Q} Q(10 - Q) - Q = Q(9 - Q)$$

- La CPO es $9 - 2Q = 0$ por lo que el monopolio produce $Q^{\mathrm{m}} = 4'5$ y elige el precio $P = 10 - 4'5 = 5'5$.

- El EN de Nash es ineficiente. Los agentes pueden alcanzar un resultado mejor para ambos si cooperan.
- Si en lugar de dos empresas hubiera un monopolio con función de coste $c(Q) = Q$, este maximizaría

$$\max_{Q} Q(10 - Q) - Q = Q(9 - Q)$$

- La CPO es $9 - 2Q = 0$ por lo que el monopolio produce $Q^{\mathrm{m}} = 4'5$ y elige el precio $P = 10 - 4'5 = 5'5$.
- Si ambas empresas se unieran y cada una produjera la mitad de la cantidad de monopolio

$$q_1^{\mathrm{c}} = q_2^{\mathrm{c}} = Q^{\mathrm{m}}/2 = 2'25$$

- El EN de Nash es ineficiente. Los agentes pueden alcanzar un resultado mejor para ambos si cooperan.
- Si en lugar de dos empresas hubiera un monopolio con función de coste $c(Q) = Q$, este maximizaría

$$\max_{Q} Q(10 - Q) - Q = Q(9 - Q)$$

- La CPO es $9 - 2Q = 0$ por lo que el monopolio produce $Q^{\mathrm{m}} = 4'5$ y elige el precio $P = 10 - 4'5 = 5'5$.
- Si ambas empresas se unieran y cada una produjera la mitad de la cantidad de monopolio

$$q_1^{\mathrm{c}} = q_2^{\mathrm{c}} = Q^{\mathrm{m}}/2 = 2'25$$

- las utilidades que los agentes obtendría si coluden sería

$$u_1^{\mathrm{c}} = u_2^{\mathrm{c}} = 2'25 \times 5'5 - 2'25 = 10'125$$

- ¿Por qué las empresas no coluden y eligen $q_1^c = q_2^c = Q^m/2 = q^c = 2'25$?

- ¿Por qué las empresas no coluden y eligen $q_1^c = q_2^c = Q^m/2 = q^c = 2'25$?
- Esto no es un EN.

- ¿Por qué las empresas no coluden y eligen $q_1^c = q_2^c = Q^m/2 = q^c = 2'25$?
- Esto no es un EN.
- Si, por ejemplo, la empresa 2 elige $q_2^c = 2'25$

- ¿Por qué las empresas no coluden y eligen $q_1^{\mathrm{c}} = q_2^{\mathrm{c}} = Q^{\mathrm{m}}/2 = q^{\mathrm{c}} = 2'25$?
- Esto no es un EN.
- Si, por ejemplo, la empresa 2 elige $q_2^{\mathrm{c}} = 2'25$
- entonces la mejor respuesta de la empresa 1 es

$$q_1(2'25) = \frac{9 - 2'25}{2} = 3'375$$

y no $q_1^{\mathrm{c}} = 2'25$.

- ¿Por qué las empresas no coluden y eligen $q_1^{\mathrm{c}} = q_2^{\mathrm{c}} = Q^{\mathrm{m}}/2 = q^{\mathrm{c}} = 2'25$?
- Esto no es un EN.
- Si, por ejemplo, la empresa 2 elige $q_2^{\mathrm{c}} = 2'25$
- entonces la mejor respuesta de la empresa 1 es

$$q_1(2'25) = \frac{9 - 2'25}{2} = 3'375$$

  y no $q_1^{\mathrm{c}} = 2'25$.
- La utilidad de la empresa 1 sería $u_1(3'375, 2'25) = 3'375 \times (10 - 5'625) - 3'375 = 11'39$.

- En cambio si este modelo de Cournot lo repetimos infinitas veces, hay un ENPS en el que las dos empresas cooperan.

- En cambio si este modelo de Cournot lo repetimos infinitas veces, hay un ENPS en el que las dos empresas cooperan.
- La estrategia del disparador,

- En cambio si este modelo de Cournot lo repetimos infinitas veces, hay un ENPS en el que las dos empresas cooperan.
- La estrategia del disparador,
  - Producir q^{c} en el primer periodo
  - En el periodo $t \geq 1$,
    - producir q^{c} si todas empresas han producido q^{c} en todos los periodos anteriores.
    - producir q^{EN} si en algún periodo anterior alguna de las empresas no ha producido q^{c}.

  es un ENPS.

- Si las dos empresas siguen la estrategia del disparador sus beneficios serían

- Si las dos empresas siguen la estrategia del disparador sus beneficios serían

$$\begin{aligned} u^{c} &= 10'125 + 10'125\delta + 10'125\delta^2 + \cdots \\ &= 10'125(1 + \delta^2 + \cdots) = \frac{10'125}{1-\delta} \end{aligned}$$

- Si las dos empresas siguen la estrategia del disparador sus beneficios serían

$$\begin{aligned} u^c &= 10'125 + 10'125\delta + 10'125\delta^2 + \cdots \\ &= 10'125(1 + \delta^2 + \cdots) = \frac{10'125}{1-\delta} \end{aligned}$$

- Supongamos que la empresa $j \neq i$ está jugando la estrategia del disparador y, en la etapa t, la empresa i se desvía de esta estrategia por primera vez

- Sus ganancias serían

$$u^{\text{nc}} = \underbrace{10'125 + 10'125\delta + \cdots 10'125\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \\ +$$

- Sus ganancias serían

$$
\begin{aligned}
u^{\text{nc}} \quad &= \quad \underbrace{10'125 + 10'125\delta + \cdots 10'125\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \\
&\quad + \qquad \underbrace{11'39\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} \qquad +
\end{aligned}
$$

- Sus ganancias serían

$$
\begin{aligned}
u^{\mathrm{nc}} &= \underbrace{10'125 + 10'125\delta + \cdots 10'125\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \\
&+ \underbrace{11'39\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{9\delta^{t+1} + 9\delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}} \\
&= 10'125(1 + \delta + \cdots \delta^{t-1}) +
\end{aligned}
$$

- Sus ganancias serían

$$
\begin{aligned}
u^{\text{nc}} &= \underbrace{10'125 + 10'125\delta + \cdots 10'125\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \\
&+ \underbrace{11'39\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{9\delta^{t+1} + 9\delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}} \\
&= 10'125(1 + \delta + \cdots \delta^{t-1}) + 11'39\delta^{t} +
\end{aligned}
$$

- Sus ganancias serían

$$
\begin{aligned}
u^{\text{nc}} &= \underbrace{10'125 + 10'125\delta + \cdots 10'125\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \\
&\quad + \underbrace{11'39\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{9\delta^{t+1} + 9\delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}} \\
&= 10'125(1 + \delta + \cdots \delta^{t-1}) + 11'39\delta^{t} + 9\delta^{t+1}(1 + \delta + \delta^{2} + \cdots) \\
&= \frac{10'125(1-\delta^{t})}{1-\delta} +
\end{aligned}
$$

- Sus ganancias serían

$$
\begin{aligned}
u^{\mathrm{nc}} &= \underbrace{10'125 + 10'125\delta + \cdots 10'125\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \\
&\quad + \underbrace{11'39\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{9\delta^{t+1} + 9\delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}} \\
&= 10'125(1 + \delta + \cdots \delta^{t-1}) + 11'39\delta^{t} + 9\delta^{t+1}(1 + \delta + \delta^{2} + \cdots) \\
&= \frac{10'125(1-\delta^{t})}{1-\delta} + 11'39\delta^{t} +
\end{aligned}
$$

- Sus ganancias serían

$$
\begin{aligned}
u^{\mathrm{nc}} &= \underbrace{10'125 + 10'125\delta + \cdots 10'125\delta^{t-1}}_{\text{etapas en las que C}} + \\
&+ \underbrace{11'39\delta^{t}}_{\text{primera etapa en la que NC}} + \underbrace{9\delta^{t+1} + 9\delta^{t+2} + \cdots}_{\text{resto etapas}} \\
&= 10'125(1 + \delta + \cdots \delta^{t-1}) + 11'39\delta^{t} + 9\delta^{t+1}(1 + \delta + \delta^{2} + \cdots) \\
&= \frac{10'125(1-\delta^{t})}{1-\delta} + 11'39\delta^{t} + \frac{9\delta^{t+1}}{1-\delta}
\end{aligned}
$$

- La estrategia del disparador es un EN si $u^{\mathrm{c}} \geq u^{\mathrm{nc}}$.

- La estrategia del disparador es un EN si $u^{\mathrm{c}} \geq u^{\mathrm{nc}}$.
- Esto es equivalente a

$$\frac{10'125(1-\delta^t)}{1-\delta} + 11'39\delta^t + \frac{9\delta^{t+1}}{1-\delta} \leq \frac{10'125}{1-\delta}$$

- La estrategia del disparador es un EN si $u^{\mathrm{c}} \geq u^{\mathrm{nc}}$.
- Esto es equivalente a

$$\frac{10'125(1-\delta^t)}{1-\delta} + 11'39\delta^t + \frac{9\delta^{t+1}}{1-\delta} \leq \frac{10'125}{1-\delta}$$

- que es lo mismo que

$$\frac{10'125\delta^t}{1-\delta} - \frac{9\delta^{t+1}}{1-\delta} \geq 11'39\delta^t$$

- La estrategia del disparador es un EN si $u^{\mathrm{c}} \geq u^{\mathrm{nc}}$.
- Esto es equivalente a

$$\frac{10'125(1-\delta^t)}{1-\delta} + 11'39\delta^t + \frac{9\delta^{t+1}}{1-\delta} \leq \frac{10'125}{1-\delta}$$

- que es lo mismo que

$$\frac{10'125\delta^t}{1-\delta} - \frac{9\delta^{t+1}}{1-\delta} \geq 11'39\delta^t$$

- dividimos por δ^t

$$\frac{10'125}{1-\delta} - \frac{9\delta}{1-\delta} \geq 11'39$$

- La estrategia del disparador es un EN si $u^{\mathrm{c}} \geq u^{\mathrm{nc}}$.
- Esto es equivalente a

$$\frac{10'125(1-\delta^t)}{1-\delta} + 11'39\delta^t + \frac{9\delta^{t+1}}{1-\delta} \leq \frac{10'125}{1-\delta}$$

- que es lo mismo que

$$\frac{10'125\delta^t}{1-\delta} - \frac{9\delta^{t+1}}{1-\delta} \geq 11'39\delta^t$$

- dividimos por δ^t

$$\frac{10'125}{1-\delta} - \frac{9\delta}{1-\delta} \geq 11'39$$

- o también

$$\frac{1'125}{1-\delta} \geq 11'39$$

- o también

$$\frac{1'125}{1-\delta} \geq 11'39$$

- es decir $\delta \geq 0'529$.

- o también

$$\frac{1'125}{1-\delta} \geq 11'39$$

- es decir $\delta \geq 0'529$.
- Igual que antes, obtenemos que la estrategia del disparador es un ENPS si $\delta \geq 0'529$.