MODELOS CON MUCHAS VARIABLES EXÓGENAS

ECONOMETRÍA I

Miguel A. Delgado

■Objetivos básicos:

▶Modelo de correlación y de regresión: Interpretación y propiedades.

▶Interpretación de los coeficientes: análisis ceteris paribus.

▶Función de regresión corta y larga: relación entre los coeficientes.

MODELO Y PARÁMETROS

■*Variable de interés:* Es una variable $k+1$-dimensional:

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} Y \\ X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}.$$

Estamos interesados en explicar y cuantificar la relación causal entre $(X_1, ..., X_k)$ e Y.

$$Y \quad \rightarrow \quad \text{variable endógena o explicada}$$

$$X_1, ..., X_k \quad \rightarrow \quad \text{variables explicativas o exógenas.}$$

El modelo económico nos proporciona una relación entre estas variables:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_k).$$

Esta relación puede ser lineal, en cuyo caso:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + ... + \beta_k X_k$$

INTERPRETACIÓN: Si mantenemos constante X_j, $j \neq i$

$$\Delta Y = \beta_j \Delta X_j \Longrightarrow \beta_j = \frac{\Delta Y}{\Delta X_j}$$

$\Longrightarrow \beta_i$ es la variación de Y cuando varía X_i en una unidad, mateniendo el resto de variables inalteradas (ceteris paribus).

MODELO DE CORRELACIÓN

■*Predictor lineal óptimo de Y dado $X_1, ..., X_k$* ::

$$PLO(Y | X_1, ..., X_k) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k,$$

donde:

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \underset{\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, ..., \bar{\beta}_k}{\arg\min} E\left[\left(Y - \bar{\beta}_0 - \bar{\beta}_1 X_1 - ... - \bar{\beta}_k X_k\right)^2\right].$$

INTERPRETACIÓN: Si escribimos cualquier modelo lineal en términos de un error ε,

$$Y = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 X_1 + ... + \bar{\beta}_k X_k + \varepsilon, \text{ con } E(\varepsilon) = 0,$$

El PLO es la combinación lineal de $X_1, ..., X_k$ que minimiza la varianza del error. Es la mejor manera de predecir los sucesos de Y a partir de una combinación lineal de las variables exógenas.

Los coeficientes tienen una fórmula explícita que derivamos en el caso $k = 2$.

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \underset{\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, ..., \bar{\beta}_k}{\arg\min} E\left[\left(Y - \bar{\beta}_0 - \bar{\beta}_1 X_1 - \bar{\beta}_2 X_2\right)^2\right].$$

$\Longrightarrow$Condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} E[Y - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2] = 0 \\ E[X_1(Y - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2)] = 0 \\ E[X_2(Y - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2)] = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \beta_0 = E(Y) - \beta_1 E(X_1) - \beta_2 E(X_2) \\ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} V(X_1) & C(X_1, X_2) \\ C(X_1, X_2) & V(X_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C(Y, X_1) \\ C(Y, X_2) \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Longrightarrow$Hecho importante: Si $C(X_1, X_2) = 0$,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{C(Y, X_1)}{V(X_1)} \text{ la pendiente del } PLO(Y|\, X_1) \\ \beta_2 &= \frac{C(Y, X_2)}{V(X_2)} \text{ la pendiente del } PLO(Y|\, X_2),\end{aligned}$$

pero en general, cuando $C(X_1, X_2) \neq 0$,

$$\beta_1 = \frac{V(X_2)\, C(Y, X_1) - C(X_1, X_2)\, C(Y, X_2)}{V(X_1)\, V(X_2) - C(X_1, X_2)^2}$$

y

$$\beta_2 = \frac{V(X_1)\, C(Y, X_2) - C(X_1, X_2)\, C(Y, X_1)}{V(X_1)\, V(X_2) - C(X_1, X_2)^2}$$

También podemos expresar:

$$\underbrace{\frac{C(Y, X_1)}{V(X_1)}}_{\delta_{11}} = \beta_1 + \beta_2 \underbrace{\frac{C(X_1, X_2)}{V(X_1)}}_{\gamma_{11}} \text{ y } \underbrace{\frac{C(Y, X_2)}{V(X_2)}}_{\delta_{12}} = \beta_2 + \beta_1 \underbrace{\frac{C(X_1, X_2)}{V(X_2)}}_{\gamma_{12}}.$$

Si definimos:

$$PLO\left(Y|\, X_j = x_j\right) = \delta_{0j} + \delta_{1j} x_j \begin{cases} \delta_{0j} = E(Y) - \delta_{1j} E\left(X_j\right) \\ \delta_{1j} = C\left(Y, X_j\right) / V\left(X_j\right) \end{cases}, \; j = 1, 2$$

$$PLO\left(X_i|\, X_j = x_j\right) = \gamma_{0j} + \gamma_{1j} x_j \begin{cases} \gamma_{0j} = E(X_i) - \gamma_{1j} E\left(X_j\right) \\ \delta_{1j} = C\left(X_i, X_j\right) / V\left(X_j\right) \end{cases}, \; i \neq \; j = 1, 2$$

■En el caso general:

$$\beta_0 = E(Y) - \beta_1 E(X_1) - \beta_2 E(X_2) - .... - \beta_k E(X_k)$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} V(X_1) & C(X_1, X_2) & \cdots & C(X_1, X_k) \\ C(X_2, X_k) & V(X_2) & \cdots & C(X_2, X_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(X_k, X_1) & C(X_k, X_2) & \cdots & V(X_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C(Y, X_1) \\ C(Y, X_2) \\ \vdots \\ C(Y, X_k) \end{pmatrix}$$

■Coeficiente de correlación R^2:

$$R^2 = \frac{V(PLO(Y|X_1, ..., X_k))}{V(Y)} = 1 - \frac{V(\varepsilon)}{V(Y)},$$

$\Longrightarrow$El R^2 es la proporción de la varianza de Y explicada por el $PLO(Y|X_1, ..., X_k)$

MODELO DE REGRESIÓN LINEAL

■El modelo de regresión múltiple consiste en la esperanza condicional con varias variables exógenas:

$$g(x_1, ..., x_k) = E(Y|X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k)$$

Cuando el modelo de regresión de Y dado $X_1, ..., X_k$ es una combinación lineal de $X_1, ..., X_k$, diremos que el modelo de regresión es lineal. Entonces:

$$\begin{aligned} E(Y|X_1, X_2, ..., X_k) &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k \\ &= PLO(Y|X_1, X_2, ..., X_k) \end{aligned}$$

▶ *Interpretación de los coeficientes:* Si todas las variables, excepto la X_j permanecen constantes:

$$\Delta E(Y|\, X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k) = \beta_j \Delta X_j$$

$$\Longrightarrow \beta_j = \frac{\Delta E(Y|\, X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k)}{\Delta X_j}$$

β_j es la variación media de Y cuando X_j varía en una unidad ceteris paribus (todas las demás variables permaneciendo constantes).

■*Ejemplo:* Supongamos que estamos interesados en estudiar la relación en una población entre Y =salario y X_1 =años de educación, teniendo en cuenta

$$X_2 = \textit{género} = \begin{cases} 1 \text{ si mujer} \\ 0 \text{ si hombre} \end{cases}.$$

La a función $E(Y|\, X_1, X_2)$ toma los siguientes valores:

$E(Y|\, X_1, X_2)$

$X_2 \diagdown X_1$	8	12	16
0	30	38	46
1	26	34	42

$$\Longrightarrow \quad E(Y|\, X_1, X_2) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 = 14 + 2X_1 - 4X_2.$$

■*Función de regresión corta y larga:* Supongamos que:

$$E\left(Y|\,X_1, X_2\right) \;=\; \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \rightarrow \text{ regresión larga.}$$

La esperanza condicional corta con respecto a X_1 será:

$$\underbrace{E\left(Y|\,X_1\right)}_{E[E(Y|X_1,X_2)|X_1]} \;=\; \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 E\left(X_2|\,X_1\right) \rightarrow \text{ regresión corta.}$$

Por tanto:

$$E\left(Y|\,X_1\right) \;\neq\; PLO\left(Y|\,X_1\right) \text{ si } E\left(X_2|\,X_1\right) \text{ no es lineal.}$$

$$\blacktriangleright\; E\left[Y|\,X_1 = x_1, X_2 = x_2\right] - E\left[Y|\,X_1 = x_1 + 1, X_2 = x_2\right] = \beta_1, \text{ todo } x_1, x_2,$$

$$\blacktriangleright\; E\left[Y|\,X_1 = x_1\right] - E\left[Y|\,X_1 = x_1 + 1\right]$$

$$= \beta_1 + \beta_2 \left\{E\left[X_2|\,X_1 = x_1\right] - E\left[X_2|\,X_1 = x_1 + 1\right]\right\}, \text{ todo } x_1, x_2,$$

$$\Longrightarrow \Delta E\left[Y|\,X_1 = x_1\right] = \beta_1 + \beta_2 \Delta E\left[X_2|\,X_1 = x_1\right].$$

Si:

$$E(X_2|\, X_1) = \gamma_{01}+\gamma_{11}X_1 = PLO(X_2|\, X_1) \Longrightarrow \begin{cases} \gamma_{01} = E(X_2) - \delta_{11}E(X_1) \\ \gamma_{11} = C(X_1, X_2)/V(X_1) \end{cases},$$

entonces:

$$E(Y|\, X_1) = \underbrace{(\beta_0 + \gamma_{01})}_{\delta_{01}} + \underbrace{(\beta_1 + \beta_2\gamma_{11})}_{\delta_{11}}X_1$$

$$\Longrightarrow \delta_{11} = \frac{C(Y, X_1)}{V(X_1)} = \beta_1 + \beta_2\frac{C(X_1, X_2)}{V(X_1)} = \beta_1 + \beta_2\gamma_{11}.$$

■*Ejemplo:* Supongamos en el último ejemplo que la función de probabilidad cojuntade X_1, X_2, y sus correspondientes marginales son las siguientes:

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

$X_2 \diagdown X_1$	8	12	16	
0	0,05	0,30	0,15	0,50
1	0,15	0,30	0,05	0,50
	0,20	0,60	0,20	

Por la Ley de la Esperanza Iterada:

$$E(Y|\, X_1 = x) = E[E(Y|\, X_1, X_2)|\, X_1 = x].$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} E\left(Y|\,X_1=8\right) &= E\left[E\left(Y|\,X_1,X_2\right)|\,X_1=8\right] \\ &= E\left(Y|\,X_1=8,X_2=0\right)\Pr\left(X_2=0|\,X_1=8\right) \\ &\quad +E\left(Y|\,X_1=8,X_2=1\right)\Pr\left(X_2=1|\,X_1=8\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(Y|\,X_1=8\right) &= 30\times\frac{0,05}{0,20}+26\times\frac{0,15}{0,20}=27 \\ E\left(Y|\,X_1=12\right) &= 38\times\frac{0,30}{0,60}+34\times\frac{0,30}{0,60}=36 \\ E\left(Y|\,X_1=16\right) &= 46\times\frac{0,15}{0,20}+42\times\frac{0,05}{0,20}=45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(Y|\,X_2=0\right) &= E\left[E\left(Y|\,X_1,X_2\right)|\,X_2=0\right]=39,6 \\ E\left(Y|\,X_2=1\right) &= E\left[E\left(Y|\,X_1,X_2\right)|\,X_2=1\right]=32,4 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow E\left(Y|\,X_1\right)=9+2,25\cdot X_1 \quad \text{y} \quad E\left(Y|\,X_2\right)=39,6-7,20\cdot X_2.$$