

Ejercicios Capítulo 4

4.1 Demuestre que $C(X; Y) = E(X; Y)$; $E(X)E(Y) = E(X^o Y) = E(X Y^o)$.

4.2 Dado $Z = X + Y$, demuestre que

$$C(X; Z) = E(X^o Z^o) = E[X^o(X^o + Y^o)] = V(X) + C(X; Y)$$

4.3 Considere la distribución de probabilidad conjunta del ejemplo al principio de este capítulo.

Halle las distribuciones de probabilidad marginales de X e Y y las distribuciones de probabilidad condicional de Y dado X , y calcule las siguientes características poblacionales:

² $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X) = E(X^2)$; $[E(X)]^2$.

² $E(Y)$, $E(Y^2)$, $V(Y) = E(Y^2)$; $[E(Y)]^2$.

² Sea $Z = X + Y$. Halle $E(Z)$, $V(Z)$, $C(Z; X)$, $C(Z; Y)$.

² Halle la función de esperanza condicional $E(Y|X)$ y el predictor lineal óptimo $PLO(Y|X)$ y escriba los valores de ambas funciones en una misma tabla.

4.4 Suponga que $Y = X + Z$, donde

$$E(X) = 100; E(Z) = 20; V(X) = 1000$$

$$V(Z) = 600; C(X; Z) = 0$$

Encuentre el predictor lineal óptimo $PLO(Y|X)$.

4.5 Suponga que $Y = X + U$, donde

$$E(X) = 100; E(U) = 0; V(X) = 600$$

$$V(U) = 1000; C(X; U) = 400$$

Se le indica que una persona tiene $Y = 110$. Prediga, de la mejor forma posible, su valor de X .

4.6 Al preguntarles el saldo Z (en miles de dólares) de su cuenta de ahorro conjunta, el marido respondió $X = Z + U$ y la mujer respondió $Y = Z + W$. Sabemos que en la población de interés, las variables Z , U , W son independientes, con $E(Z) = 5$, $E(U) = 0$, $E(W) = 0$, $V(Z) = 30$, $V(U) = 6$ y $V(W) = 4$.

² Si el marido responde $X = 6$, prediga la cantidad que respondió la mujer.

² Si la mujer responde $Y = 6$, prediga la cantidad que respondió el marido.

4.7 En una encuesta nacional, se pregunta a los hermanos sobre los años de educación de su madre. Ninguno de ellos está seguro del valor correcto X . El hermano mayor responde $Y_1 = X + U_1$ mientras que el menor responde $Y_2 = X + U_2$. Sabemos que en la población de interés, las variables X , U_1 , U_2 no están correlacionadas, y que $E(X) = 14$, $E(U_1) = E(U_2) = 0$, $V(X) = 36$, $V(U_1) = 4$ y $V(U_2) = 6$. Para un par de hermanos concreto, sabemos que el promedio de sus respuestas, es decir $(Y_1 + Y_2)/2$, es igual a 16.

- ² Halle la mejor predicción posible de los años de educación de su madre.
- ² ¿Podría haber mejorado su predicción si conociera solamente la respuesta del hermano mayor?
- 4.8 Compruebe la fórmula (4.9) de la covarianza entre funciones lineales. Es decir, muestre que si $Z_1 = a_1 + b_1X + c_1Y$ y $Z_2 = a_2 + b_2X + c_2Y$, donde las a 's, b 's y c 's son constantes, entonces $C(Z_1; Z_2) = b_1b_2V(X) + c_1c_2V(Y) + (b_1c_2 + b_2c_1)C(X; Y)$. (Pista: compruebe primero que la desviación de Z_1 respecto a su valor esperado es $Z_1^a = b_1X^a + c_1Y^a$).
- 4.9 En cierta distribución de probabilidad bivalente, Y es independiente de X . Pruebe que (para todo j y para todo k), la probabilidad conjunta $\Pr(X = X_j; Y = Y_k)$ es igual al producto de las probabilidades marginales $\Pr(X = X_j)$ y $\Pr(Y = Y_k)$. ¿Qué implicaciones tiene este resultado sobre las distribuciones de probabilidad de X dado Y ?
- 4.10 Suponga que las variables aleatorias X e Y son independientes. Demuestre que el producto esperado $E(XY)$ es igual al producto de las esperanzas, $E(X)E(Y)$. ¿Qué implicación tiene a su vez este resultado sobre $C(X; Y)$?
- 4.11 En cierta distribución de probabilidad bivalente, las variables X e Y no son independientes, pero la esperanza condicional de Y dado X es la misma para todos los valores de X . Demuestre que esto implica que el predictor lineal óptimo de Y dado X es una línea horizontal. Demuestre a continuación que esto implica que $C(X; Y) = 0$.
- 4.12 En cierta distribución de probabilidad bivalente, las variables X e Y no son independientes, y las esperanzas condicionales de Y dado X no son iguales para todos los valores de X . ¿Es todavía posible que $C(X; Y) = 0$?
- 4.13 Suponga que X = renta, Y = tasa de ahorro (proporción de renta ahorrada), de manera que los ahorros son $Z = XY$. ¿Es el ahorro medio igual a la tasa de ahorro media multiplicada por la renta media?
- 4.14 Complete la derivación de las fórmulas para $\hat{\theta}$ y $\hat{\sigma}^2$ en la expresión (4.11).