Repaso de Matemáticas

MMF (gracias a Matthias Kredler por prestarnos el math review de Dynamic Macroeconomics)

Primavera 2015: reducido 1

Funciones

Una función representa una relación entre una variable, que llamaremos por ejemplo y, y otro conjunto de variables, por ejemplo $x, z, \ldots$.. La característica fundamental de una función es que, para cualquier conjunto dado de valores de $x, z, \ldots,$ existe uno y solamente un valor para y.

Ejemplo:

$$y = f(x) = x^2.$$

Funciones: Dominio y rango

- Dominio de la función:
  - Valores que puede tomar x
- Rango de la función:
  - Valores que puede tomar y
- Si llamamos X al conjunto de valores que componen el dominio y llamamos Y al conjunto de valores que componen el rango, escribimos
$$f : X \to Y.$$
- Ejemplo: Si $x \in [0,5]$ e $y = f(x) = x^2$, entonces
$$f : [0,5] \to [0,25].$$

Derivada de una función (I)

- Suponga que y es una función de x, i.e. $y = f(x)$. La derivada de $f(x)$ con respecto a x, cuya notación es

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \text{ o bien } \frac{\partial y}{\partial x},$$

  nos dice cómo cambia $f(x)$ cuando x se incrementa en una cantidad muy pequeña (*infinitésima*).
- Si y aumenta cuando x aumenta, entonces la derivada es positiva, $\frac{\partial y}{\partial x} > 0$, y si y disminuye cuando x aumenta, entonces la derivada es negativa, $\frac{\partial y}{\partial x} < 0$.
- Si $\frac{\partial y}{\partial x} > 0$ para todo valor de x, entonces y es una *función creciente* de x, y si $\frac{\partial y}{\partial x} < 0$ para todo valor de x, entonces y es una *función decreciente* de x.
- Por ejemplo, la función $y = x^2$ es creciente para todos los valores de $x \in (0, 5]$

Derivada de una función (II)

- Considere nuevamente el caso de $y = x^2$, pero ahora supongamos que $x \in X = [-5, 5]$.
- Para valores de x menores que 0 la función es decreciente, mientras que para valores de x mayores que 0 la función es creciente, ya que

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x < 0 \text{ para } x \in [-5, 0) \text{ y } \frac{\partial y}{\partial x} = 2x > 0 \text{ para } x \in (0, 5] \, .$$

Derivada de una función (III)

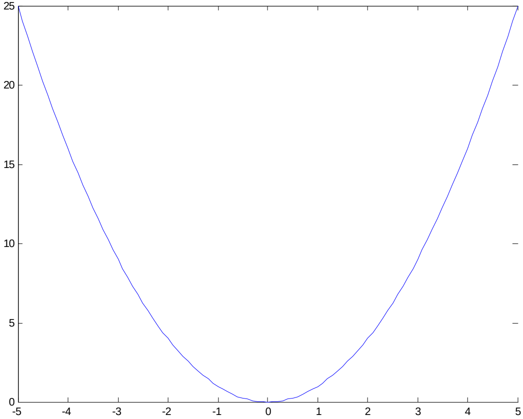


Figure: $y = x^2$

DERIVADA SEGUNDA

- La derivada segunda, cuya notación es

$$f''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

  nos indica cuánto cambia la derivada como resultado de un pequeño aumento en x.
- Si tenemos $\frac{\partial y}{\partial x} > 0$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$, no solamente ocurre que y aumenta a medida que aumenta x, sino que también y se incrementa en cantidades cada vez más grandes.

FUNCIÓN CONVEXA

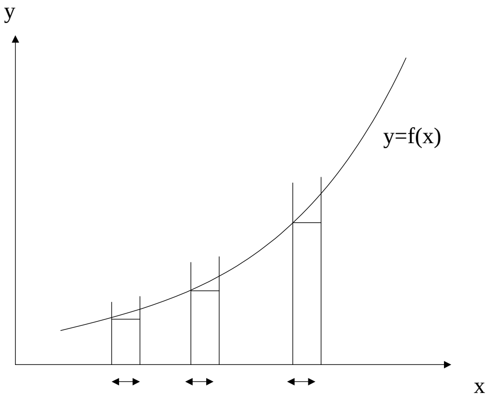


FIGURE: Función convexa

Función cóncava

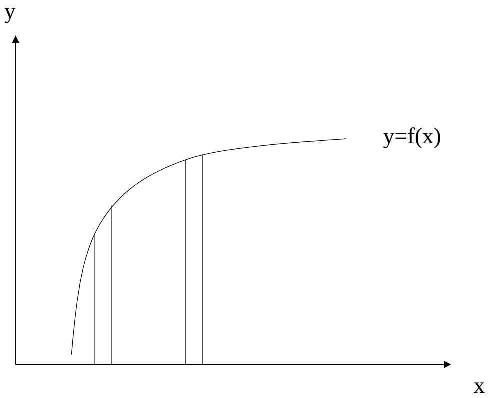


Figure: Función cóncava

Derivadas y la pendiente de una tangente (I)

Suponga que $y = f(x)$. En el caso que $\frac{\partial y}{\partial x} > 0$, si dibujamos una recta en el punto (x, y), esta recta tendrá una pendiente positiva, o sea será una recta creciente. Si $\frac{\partial y}{\partial x} < 0$, entonces la recta tendrá una pendiente negativa.

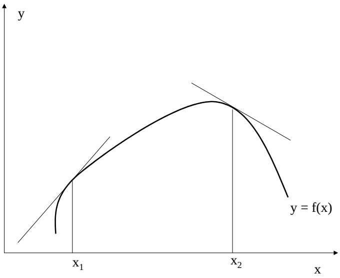
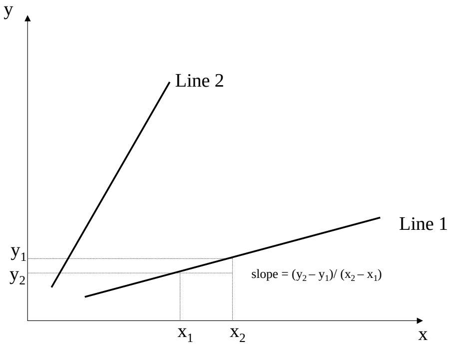


Figure: Rectas tangentes

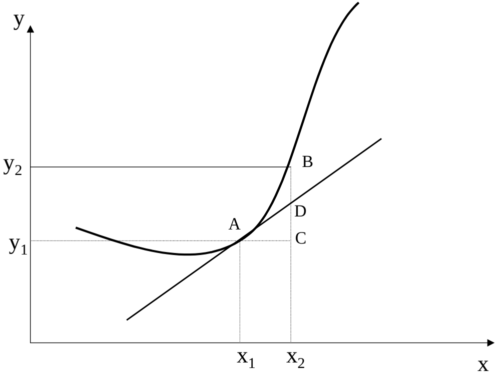
Derivadas y la pendiente de una tangente (II)

Note primeramente que la *pendiente* de una recta es

$$pendiente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



DERIVADAS Y LA PENDIENTE DE UNA TANGENTE (III)



Algunas reglas de derivación (I)

- Suponga que $y = a$, donde a es una constante, entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

  ya que x no afecta a y.

- Suponga que $y = ax$, entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a.$$

- Suponga que $y = ax^b$, entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = abx^{b-1}.$$

Algunas reglas de derivación (II)

- Suponga que $y = e^x$, entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^x.$$

- Suponga que $y = \ln(x)$, entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

Regla de la cadena

- Suponga que y es función de x, y que x es función de z, i.e.

$$y = f(x(z)),$$

  donde $x(z)$ indica el hecho de que x es función de z.

- ¿Qué es $\frac{\partial y}{\partial z}$? Está dado simplemente por

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}.$$

- Por ejemplo, suponga que $y = \ln(x) = \ln(z^2 + 2z)$, i.e. $x = z^2 + 2z$, entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{x}(2z+2) = \frac{(2z+2)}{z^2+2z}.$$

Regla del producto

- Suponga $y(x)$ y $g(x)$, y que $z = y(x)g(x)$. Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} g(x) + \frac{\partial g}{\partial x} f(x).$$

- Por ejemplo, suponga que $z = (2x + 3)(3x^2)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial x} g(x) + \frac{\partial g}{\partial x} f(x) = (2)(3x^2) + (6x)(2x + 3) \\ &= 6x^2 + 12x^2 + 18x = 18x^2 + 18x.\end{aligned}$$

Regla del cociente

- Suponga que $y(x)$ y $g(x)$, donde $z = \frac{y(x)}{g(x)}$. Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x} g(x) - \frac{\partial g}{\partial x} f(x)}{g(x)^2}.$$

- Por ejemplo, si $z = \frac{2x-3}{x+1}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x} g(x) - \frac{\partial g}{\partial x} f(x)}{g(x)^2} &= \frac{(2)(x+1) - (1)(2x-3)}{(x+1)^2} \\ = \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} &= \frac{5}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Funciones de más de una variable

- Suponga $y = f(k(z), l(z))$. La variable y depende de k y l, y estas a su vez dependen de z. ¿Cómo podemos encontrar la derivada $\frac{\partial y}{\partial z}$? Esta dada por
$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial z}.$$
- Por ejemplo, suponga que $y = k^a l$, y que $k = 2z$ y $l = z^{-2}$. Entonces,

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial z} = (ak^{a-1}l)2 + (k^a)(-2)z^{-3}.$$

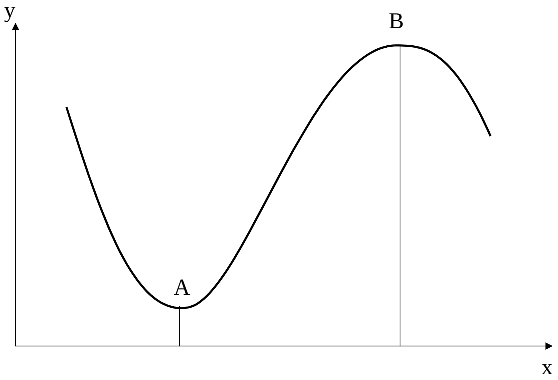
Máximo y mínimo de una función (I)

- Suponga que $y = f(x)$. Si algun punto x^* es un *mínimo local o un máximo local* de la función f, entonces satisface

$$f'(x^*) = 0.$$

- Si una función es estrictamente cóncava, entonces tiene solamente un máximo, mientras que si es convexa tiene solamente un mínimo.
- Para ello usamos la derivada segunda de f: Si $f''(x^*) < 0$ (función cóncava) entonces f tiene un único máximo, si en cambio $f''(x^*) > 0$ entonces x^* es el único mínimo.

Máximo y mínimo de una función (II)



Máximo y mínimo de una función (III)

Por ejemplo, supongamos que $y = x^2$.

- Entonces un máximo o mínimo x^* debe satisfacer

$$f'(x^*) = 2x^* = 0.$$

  Con lo cual $x^* = 0$.

- Es más, como

$$f''(x^*) = f''(0) = 2 > 0,$$

  $x^* = 0$ es un mínimo global o único (ver la Figura 1).

MAXIMIZACIÓN CON CONDICIONES DE IGUALDAD

Muchas veces tenemos que solucionar problemas de optimización con condiciones adicionales. Por ejemplo, considera un consumidor que quiere maximizar su utilidad

$$\max_{x_1,x_2} \{\alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2\} \tag{1}$$

comprando dos bienes x_1, x_2 dado precios p_1, p_2. Su restricción presupuestaria es:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad = (\leq) \quad y \tag{2}$$

(Sabemos que la restricción se va a cumplir con igualdad porque el consumidor siempre prefiere más de los dos bienes.)

Método 1: Sustitución

Obtenga x_2 como función de x_1, y, p_1 y p_2 utilizando la restricción (2):

$$x_2 = \frac{y - p_1 x_1}{p_2}. \tag{3}$$

Sustituya (3) en el criterio (1) para obtener

$$\max_{x_1} \left\{ \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln \left(\frac{y - p_1 x_1}{p_2} \right) \right\}.$$

Tomando la derivada con respecto a x_1 e igualando a zero se obtiene

$$x_1^* = \frac{\alpha_1 y}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_1}.$$

Utilizando otra vez (3) se llega a

$$x_2^* = \frac{\alpha_2 y}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_2}.$$

Método 2: Lagrangiano

Reescribe la restricción en forma de "$\cdots \geq 0$" (recordando que gastos tienen que ser igual o menor a y):

$$\underbrace{y - p_1 x_1 - p_2 x_2}_{=C(x_1, x_2)} \quad = (\geq) \quad 0 \tag{4}$$

Formar el Lagrangiano: Sumamos al criterio (1) el lado izquierdo de (4) (es decir, $C(x_1, x_2)$) multiplicado por λ (de esta forma, siempre obtenemos $\lambda > 0$, interpretándose λ como el precio sombra):

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 - \lambda \left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - y \right)$$

Tomando las derivadas de $\mathcal{L}$ en x_1 y x_2 e igualando a zero, obtenemos un sistema de tres ecuaciones en las tres incógnitas x_1, x_2, λ (recuerda (4)). La solución del sistema son los mismos x_1^*, x_2^* como antes.

Interpretación del parámetro de Lagrange λ

λ es un *precio sombra*:

- En general: si relajamos la restricción (2) en una unidad (marginal), entonces el criterio (1) (maximizado) se incrementará en λ unidades.
- En nuestro ejemplo: si le damos al consumidor un euro más de ingreso y, su utilidad se incrementará en λ unidades.

Discusión de los dos métodos de solución

- Las dos formas son equivalentes; siempre llevan al mismo resultado.
- Depende de las circunstancias y del gusto personal cuál es preferible.
- Si hay más de una restricción, normalmente el Lagrangiano es el método más sencillo.