Solow: Se trata de la acumulación de capital físico

Felix Wellschmied

Universidad Carlos III de Madrid

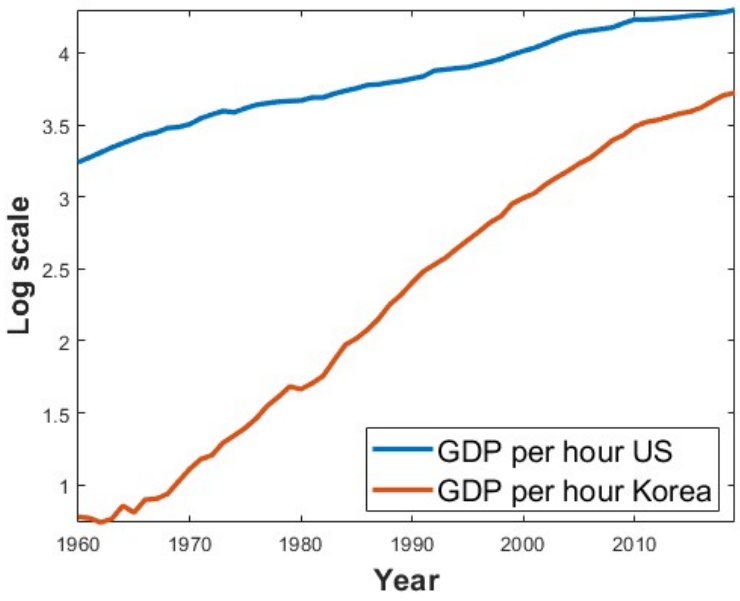
Crecimiento Económico

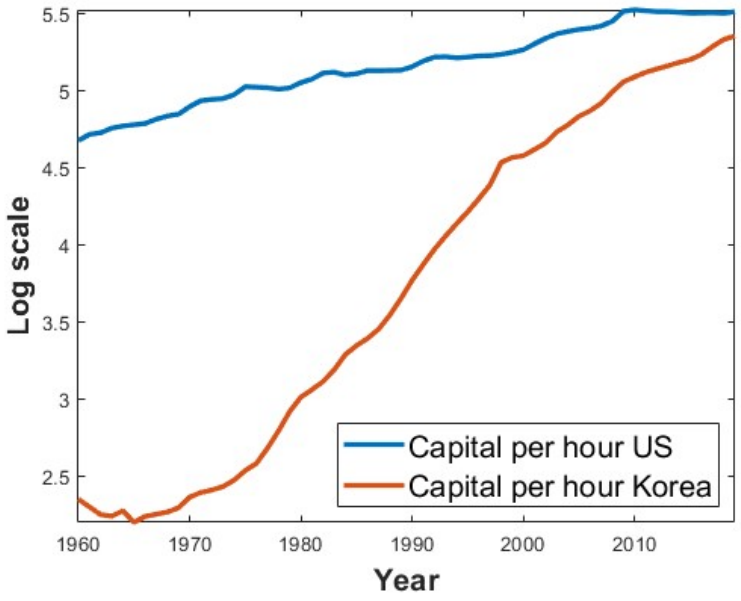
Crecimiento económico moderno

En los últimos 150 años:

- El crecimiento económico de las economías avanzadas puede describirse como un crecimiento exponencial.
- Existen enormes diferencias entre países en cuanto a los ingresos por persona entre países.
- Las diferencias de ingresos no son estables. De hecho, hay algunos "milagros de crecimiento".
  - Los milagros de crecimiento se asocian con una rápida acumulación de capital.

Corea, un milagro de crecimiento





Crecimiento económico moderno

- Para entender estos fenómenos, necesitamos una teoría.
- Nuestra teoría se guiará por ciertos hechos de datos.
- Estos hechos deben ser "universalmente" verdaderos, es decir, relativamente estables a lo largo del tiempo.

Hechos de Kaldor

Kaldor (1961) resumió seis hechos sobre los ingresos. Consideraremos los primeros cinco:

1. La productividad laboral crece a un ritmo constante a lo largo del tiempo.
2. El capital por trabajador crece a un ritmo constante en el tiempo.
3. El capital tiene una tasa de rendimiento constante en el tiempo.
4. La relación capital-producción es constante en el tiempo.
5. La proporción de ingresos que va al capital es constante en el tiempo.

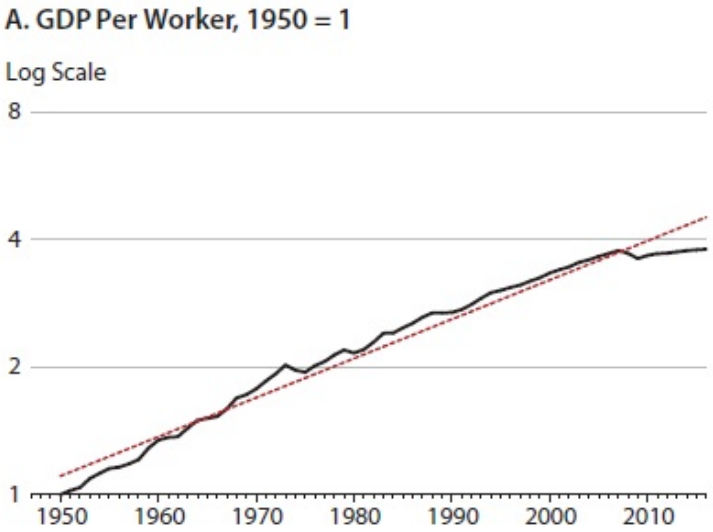
Hechos de Kaldor II

Recientemente, Herrendorf et al. (2019) consideran estos hechos de nuevo, incluyendo datos recientes:

1. En términos generales, los hechos de Kaldor siguen siendo válidos.
2. Sin embargo, algunos momentos de datos muestran cierta variación temporal.
3. Sin embargo, en este curso utilizaremos los hechos de Kaldor como punto de referencia.

Crecimiento constante de la productividad laboral

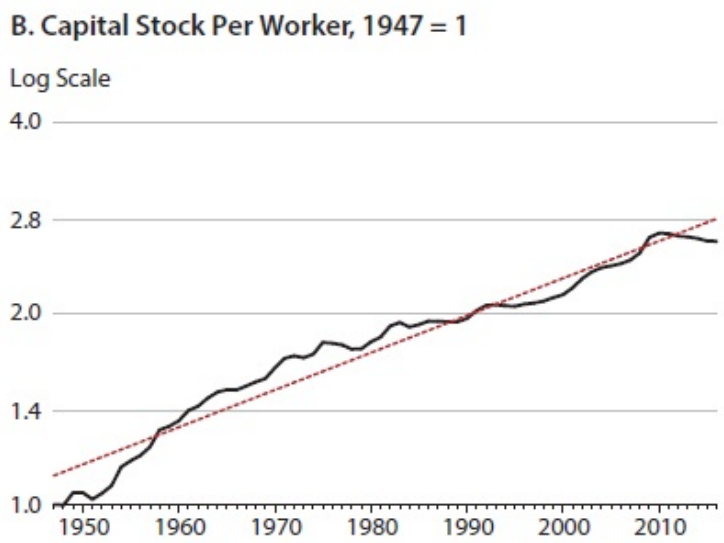
U.S.



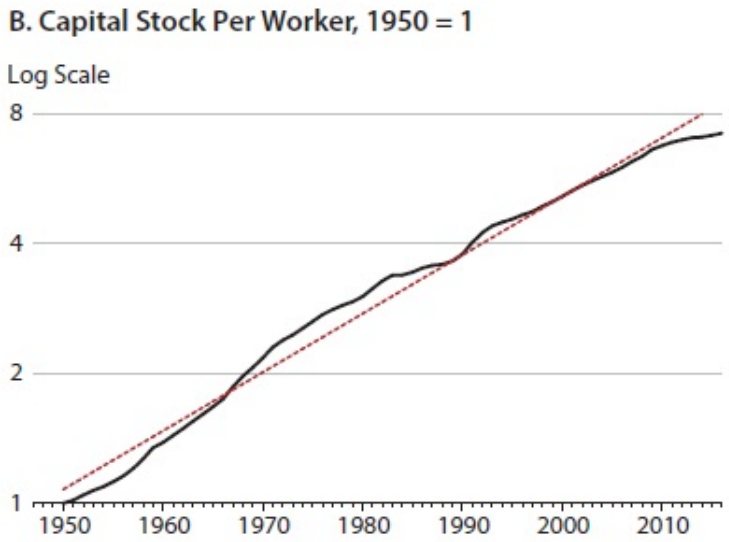
UK

- Un crecimiento constante de la productividad laboral es una buena aproximación.
- Sin embargo, observamos una desaceleración después de 1970.

Crecimiento constante del capital por trabajador



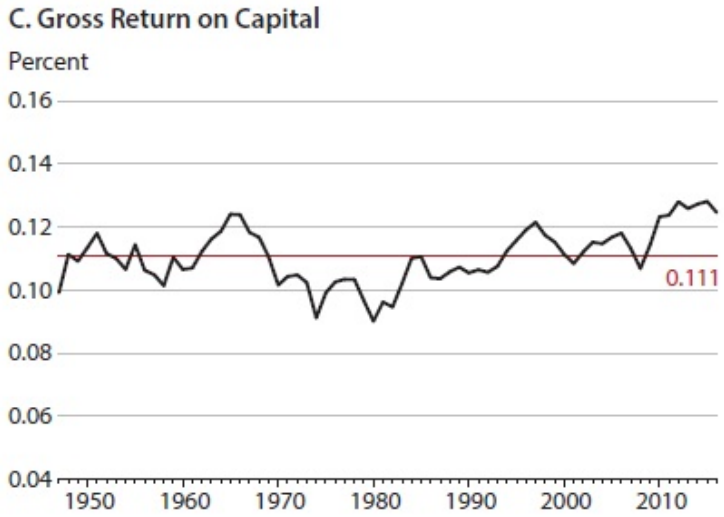
U.S.



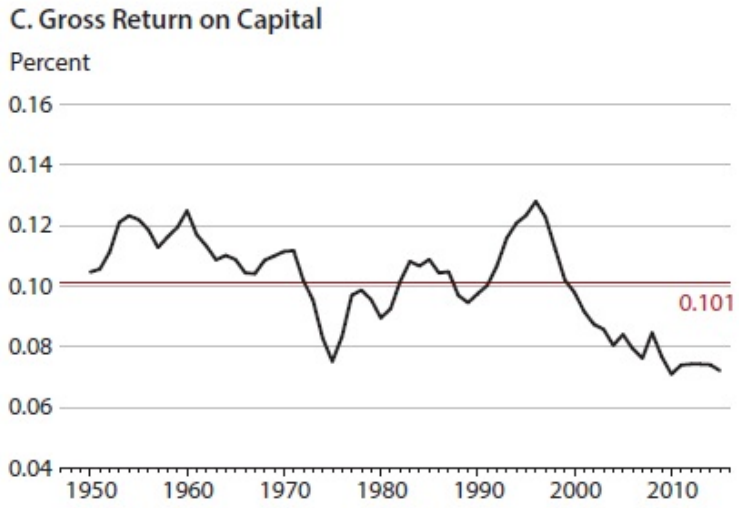
UK

- Un crecimiento constante del capital por trabajador es una buena aproximación.
- Sin embargo, observamos una desaceleración después de 1970.

Retorno constante al capital



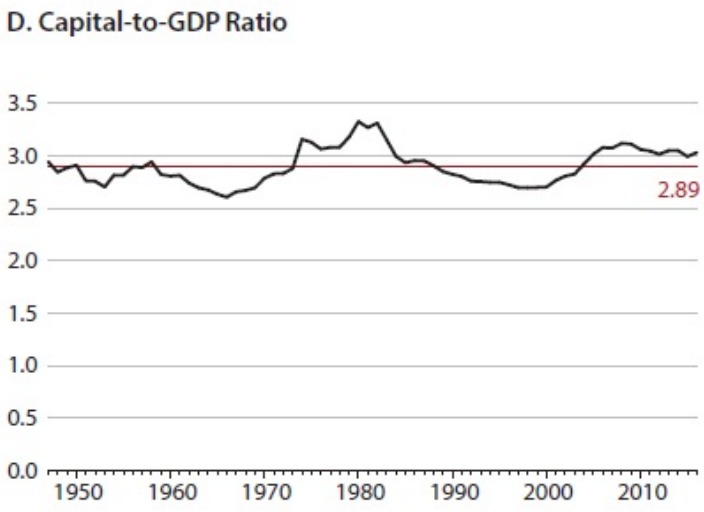
U.S.



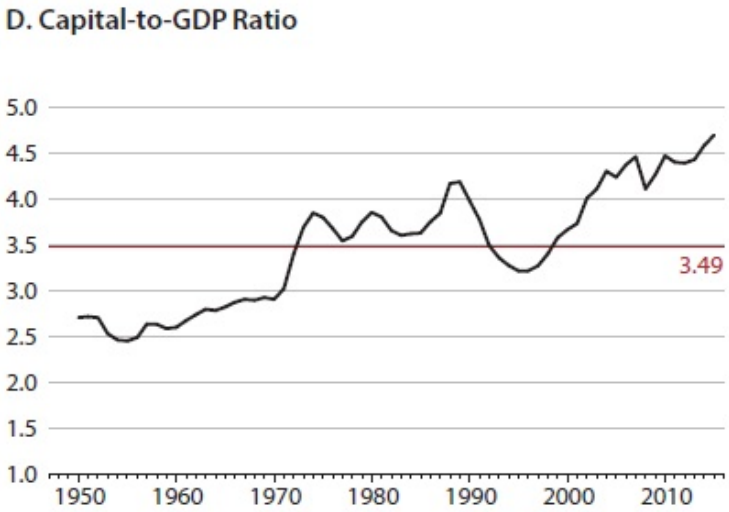
UK

- Un rendimiento constante del capital es una buena aproximación.
- Desde la década de 2000, observamos cierta variación temporal que es diferente entre países.

Una relación capital-producción constante



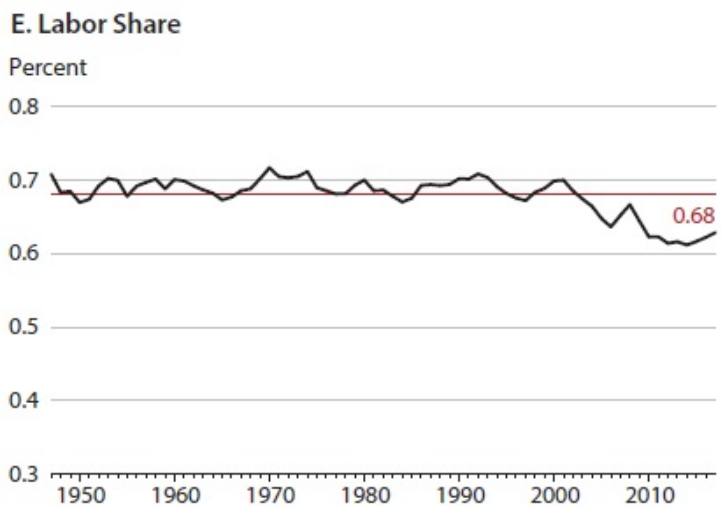
U.S.



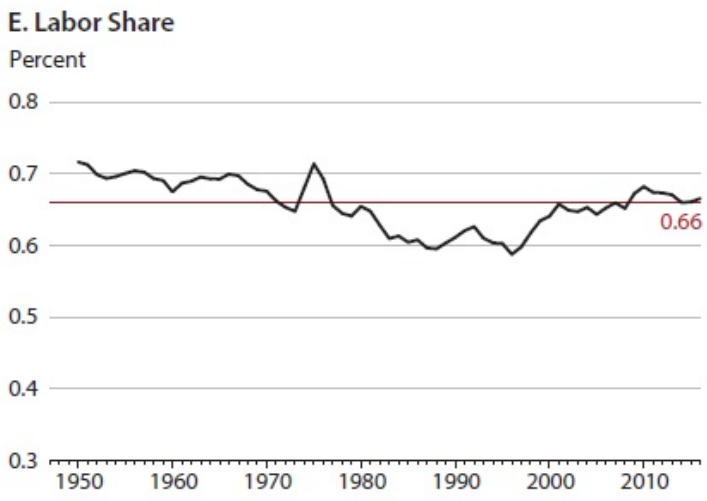
UK

- En Estados Unidos, el capital y la producción crecen aproximadamente al mismo ritmo.
- En el Reino Unido, el capital crece más rápido que la producción.

Una participación constante del capital en los ingresos



U.S.



UK

- En lugar de la participación del capital, consideran que es más fácil medir la participación del trabajo.
- La participación laboral comenzó a caer en Estados Unidos durante la década de 2000. Estaba cayendo en el Reino Unido entre los años 50 y 2000.

Comprender el crecimiento económico moderno

Un primer intento de entender el crecimiento económico moderno

- Solow (1956) presenta un marco sobre cómo entender el fenómeno del crecimiento económico moderno (factores Kaldor). Por ese trabajo, ganó el premio Nobel.
- Es una modelo de economía cerrada donde la producción tiene lugar por el trabajo, el capital y la tecnología.
- Toma el crecimiento tecnológico como exógeno y pone la acumulación de capital físico en el centro del escenario.

Cómo se lleva a cabo la producción

El mundo real

- En una economía moderna, la producción tiene lugar principalmente en empresas que a menudo son corporaciones multinacionales.
- Estas empresas producen miles de bienes y servicios diferentes que dependen de miles de importaciones y crean miles de exportaciones.
- Para la producción, emplean
  - mano de obra de diferentes tipos (educación, edad, sexo...)
  - equipos, estructuras, carreteras, terrenos, materias primas...
- Gran parte de la producción también es realizada por el gobierno.
- La mayor parte del intercambio de bienes y servicios, así como de los factores de la producción, se lleva a cabo en miles de mercados.
- Las personas toman decisiones sobre el consumo hoy frente al futuro.

Abstracciones

El mundo es bastante complicado (más que la Inglaterra medieval) y tendremos que hacer simplificaciones para avanzar en su comprensión:

- Asumimos una economía cerrada.
- Nos abstenemos del gobierno y la tratamos como al sector privado.
- Solo hay un bien de producción.
- La producción se lleva a cabo a nivel de empresas que alquilan los factores de producción a los hogares.

Abstracciones: factores de producción

Para centrarnos en los factores de producción correctos, nos fijamos en los datos de las cuentas nacionales:

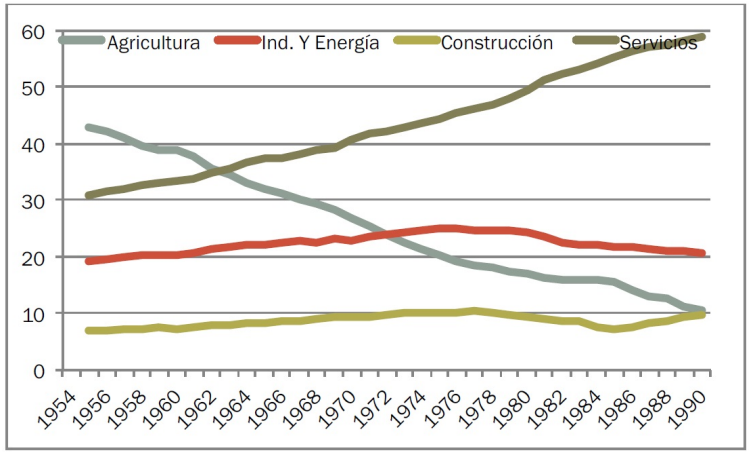
- La compensación laboral es alrededor de 2/3 del ingreso nacional, es decir, es importante. Para lidiar con esto, asumiremos que podemos agregar todos los diferentes tipos de trabajo en un solo uno.
- Del mismo modo, asumimos que podemos agregar todos los tipos de capital físico en solo uno.
- Esto implica que trataremos la tierra como capital físico. Uno puede objetar que la tierra es finita. Sin embargo, los fertilizantes y los edificios altos sugieren lo contrario.
- Incluso para Estados Unidos, un importante productor de petróleo, los ingresos de los recursos naturales son relativamente pequeños. Por lo tanto, los ignoraremos. También se pueden interpretar como capital físico reconociendo que, hasta ahora, no se agotó.

Abstracciones: tecnología

También asumimos una sola medida sobre qué tan bien usamos el capital y el trabajo para producir producción, es decir, tecnología.

- Esto puede estar relacionado con la organización de la empresa, por ejemplo, el estilo de gestión.
- Esto puede estar relacionado con la logística, por ejemplo, la entrega justo a tiempo.
- Esto puede relacionarse con nuevos productos que son mejores que el producto anterior pero no más caros de producir, por ejemplo, un algoritmo informático más rápido.
- De hecho, muchos de los productos que consumimos hoy en día no existían hace 50 años.
- Por lo tanto, pensaremos en las mejoras en A como nuevas *ideas*, o mejores recetas.

¿Más productos o nuevos productos?



El tipo de productos que producimos hoy en día se ve muy diferente del tipo de productos que producimos en 1955.

Abstracciones: mercados

Para entender los mercados, volvemos a mirar las cuentas nacionales:

- La participación en los beneficios del ingreso nacional es relativamente pequeña, como 5%.
- Esto sugiere que los mercados de productos y los mercados de los factores de producción son casi perfectamente competitivos.

Por lo tanto, los factores de producción ganan sus productos marginales

Abstracciones: La función de producción agregada

Nuestros supuestos implican que las empresas operan una función de producción agregada que combina trabajo, L, capital, K, y el nivel de tecnología, A, en un solo bien: $Y = F(K, L, A)$. Nuestro modelo debe ser consistente con los hechos de Kaldor. Ahora usamos el hecho de las participaciones de renta constante para averiguar cómo debería ser F:

$$\frac{r(t)K(t)}{Y(t)} = \alpha, \tag{1}$$

$$\frac{w(t)L(t)}{Y(t)} = 1 - \alpha. \tag{2}$$

Dado el supuesto de mercados competitivos, tenemos:

$$\frac{\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} K(t)}{Y(t)} = \alpha, \tag{3}$$

$$\frac{\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} L(t)}{Y(t)} = 1 - \alpha. \tag{4}$$

Abstracciones: La función de producción agregada II

Esto se aplica, entre otras, a la función de producción de Cobb-Douglas:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} \tag{5}$$

Tenga en cuenta que el lugar de $A(t)$ en la función de producción no es particularmente importante:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} = A(t)^{1-\alpha} K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha} = E(t)K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}, \tag{6}$$

con $E(t) = A(t)^{1-\alpha}$. La forma en que lo he escrito arriba hará que las matemáticas sean más fáciles.

Abstracciones: Decisiones del hogar

- Una de las preguntas más importantes en la macroeconomía moderna es cómo los hogares compensan el consumo de hoy con el de mañana.
- El modelo de Solow se abstrae de esto y asume que los hogares ahorran una fracción constante de sus ingresos cada período.

Resolviendo el modelo

La distribución del ingreso

Incluso sin pensar en la dinámica del modelo, ya podemos derivar la distribución del ingreso. De mercados perfectamente competitivos, tenemos:

$$w(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = (1-\alpha)K(t)^{\alpha}A(t)^{1-\alpha}L(t)^{-\alpha} \tag{7}$$

$$r(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = \alpha K(t)^{\alpha-1}\left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} \tag{8}$$

Por lo tanto, como los hogares son dueños de los factores de producción, el ingreso total del hogar es

$$r(t)K(t) + w(t)L(t) = Y(t). \tag{9}$$

Esto será conveniente, ya que no necesitamos distinguir entre la producción y los ingresos de los hogares. Por ejemplo, los ahorros agregados son simplemente $S(t) = sY(t)$.

Acumulación de capital

El modelo de Solow asume que cada período se deprecia una fracción δ del stock de capital. Trabajando en contra de esto, los hogares invierten $I(t) = S(t)$:

$$\dot{K}(t) = S(t) - \delta K(t) \tag{10}$$

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \tag{11}$$

$$\dot{K}(t) = sK(t)^{\alpha} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} - \delta K(t). \tag{12}$$

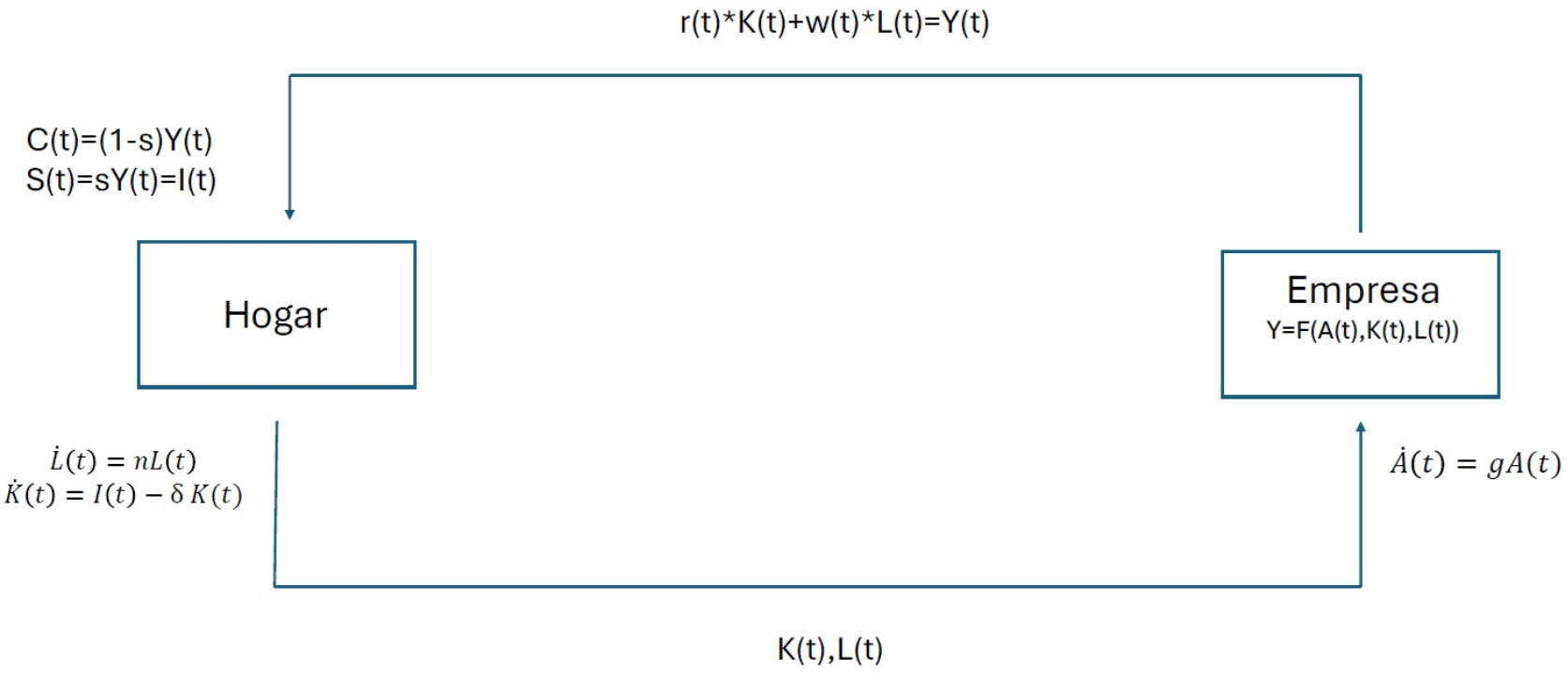
Dinámica de la población y la tecnología

El modelo de Solow asume que la población y la tecnología crecen a tasas exógenas. Para ser consistente con los hechos de Kaldor sobre la productividad laboral, asume que crecen exponencialmente:

$$L(t) = L(0)\exp(nt) \Rightarrow \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \tag{13}$$

$$A(t) = A(0)\exp(gt) \Rightarrow \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g. \tag{14}$$

Resumen de la economía



Estado estacionario

Como antes, comenzaremos nuestro análisis con el estado estacionario del modelo. Para esto, necesitamos encontrar una variable que tenga un estado estacionario. Resulta que, en el modelo de Solow, estos son producción y capital por trabajador eficiente:

$$\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{15}$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = \tilde{k}(t)^{\alpha}. \tag{16}$$

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital

$$\dot{K}(t) = sK(t)^{\alpha}\left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} - \delta K(t) \tag{17}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - \delta \tag{18}$$

Necesitamos reescribir el lado izquierdo en términos de trabajadores eficientes. Para esto, necesitamos encontrar una expresión para $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}$.

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital II

Dada la definición:

$$\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{19}$$

$$\ln \tilde{k}(t) = \ln K(t) - \ln A(t) - \ln L(t). \tag{20}$$

Ahora tome la derivada con respecto al tiempo y use el hecho de que la derivada de una variable en logaritmos con respecto al tiempo es la tasa de crecimiento de esa variable:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{21}$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g - n \tag{22}$$

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital III

Combinando las ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} + n + g = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - \delta \tag{23}$$

$$\dot{\tilde{k}}(t) = s\tilde{k}(t)^{\alpha} - (n + g + \delta)\tilde{k}(t). \tag{24}$$

El capital por trabajador eficiente crece con el tiempo debido al ahorro por trabajador eficiente, $s\tilde{k}(t)^{\alpha}$. Se reduce debido al crecimiento de la población, el progreso tecnológico y la depreciación del capital.

Resolviendo para el estado estacionario

Conjetura que un estado estacionario existe, $\dot{\tilde{k}}(t) = 0$:

$$0 = s(\tilde{k}^*)^\alpha - (n + g + \delta)\tilde{k}^* \tag{25}$$

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{26}$$

Tenga en cuenta que hemos encontrado de hecho un estado estacionario. Nuestra variable, $\tilde{k}^*$, epende sólo de parámetros invariantes en el tiempo. El capital de estado estacionario por trabajador eficiente aumenta en la tasa de ahorro y disminuye en la tasa de crecimiento de la población, el progreso tecnológico y la tasa de depreciación del capital.

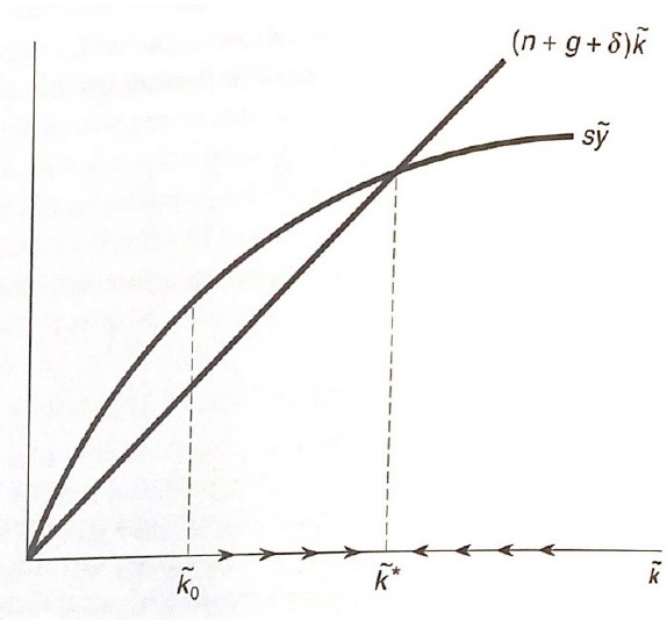
Resolviendo para el estado estacionario II

Una vez que sabemos $\tilde{k}^*$, es sencillo calcular las otras variables endógenas en estado estacionario:

$$\tilde{y}^* = \frac{K(t)^\alpha \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha}}{A(t)L(t)} = (\tilde{k}^*)^\alpha \tag{27}$$

$$\tilde{c}^* = (1-s)\tilde{y}^* = (1-s)(\tilde{k}^*)^\alpha. \tag{28}$$

El estado estacionario gráficamente



- Tenga en cuenta que existe un estado estacionario con $\tilde{k}^* > 0$.
- La clave para esto es que $s(\tilde{k}^*)^\alpha = s\tilde{y}^*$ es cóncavo. Para esto, requerimos rendimientos marginales decrecientes para el capital.

Producción per cápita en estado estacionario

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{29}$$

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = A(t)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{30}$$

A diferencia del modelo de Malthus, el modelo de Solow puede explicar las diferencias a largo plazo en el ingreso per cápita:

- Un nivel tecnológico más alto aumenta la producción per cápita.
- Una tasa de ahorro más alta aumenta la producción per cápita.
- Una mayor tasa de crecimiento de la población o una tasa de depreciación del capital disminuyen la producción per cápita.

Pagos de factores en estado estacionario

El precio de alquiler del capital viene dado por

$$r(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = \alpha K(t)^{\alpha-1} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} = \alpha \tilde{k}(t)^{\alpha-1}, \tag{31}$$

lo cual es una constante a largo plazo. Por lo tanto, el modelo de Solow es consistente con el hecho de Kaldor sobre rendimientos constantes al capital.

$$w(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = (1-\alpha) K(t)^{\alpha} A(t) \left(A(t)L(t)\right)^{-\alpha} = (1-\alpha) A(t) \tilde{k}(t)^{\alpha}, \tag{32}$$

que está creciendo con la tecnología. Kaldor no estudió los salarios, pero este hecho también se basa en los datos.

Crecimiento en estado estacionario

En estado estacionario, por definición, capital (y producción) por trabajador eficiente, $\tilde{k}(t)$, es constante. Esto no significa, sin embargo, que el capital o el capital per cápita, $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, sean constantes. De hecho, ya sabemos que:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{33}$$

$$\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}\right)^* = n + g \tag{34}$$

$$\left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\right)^* = g. \tag{35}$$

Es decir, en estado estacionario, el capital per cápita crece al ritmo del progreso tecnológico. Una tasa de crecimiento constante del capital per cápita es uno de los hechos de Kaldor.

Crecimiento en estado estacionario II

Del mismo modo para la producción,

$$\frac{\dot{\tilde{y}}(t)}{\tilde{y}(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{36}$$

$$\left(\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}\right)^* = n + g \tag{37}$$

$$\left(\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}\right)^* = g. \tag{38}$$

Por lo tanto, la producción per cápita en estado estacionario también crece a la tasa de progreso tecnológico. Además, como Y y K crecen a una tasa de $n + g$, su relación es constante que completa los hechos de Kaldor.

Crecimiento en estado estacionario III

Por último, para el consumo,

$$\frac{\dot{\tilde{c}}(t)}{\tilde{c}(t)} = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{39}$$

$$\left(\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\right)^* = n + g \tag{40}$$

$$\left(\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\right)^* = g. \tag{41}$$

Por lo tanto, el consumo per cápita en estado estacionario también crece a la tasa de progreso tecnológico. Un estado estacionario en el que todas las variables endógenas crecen al mismo ritmo se conoce como una *trayectoria de crecimiento balanceado*.

Un desvío: una alternativa para resolver la dinámica del estado estacionario

El hecho de que la relación capital/producción sea constante en estado estacionario proporciona una alternativa para resolver la dinámica del estado estacionario que no requiere que definamos $\tilde{k}(t)$. En algunos modelos, esto resultará útil. Comience con la función de producción:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} \tag{42}$$

$$\frac{Y(t)}{Y(t)^{\alpha}} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\alpha} \left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha} \tag{43}$$

$$Y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)L(t). \tag{44}$$

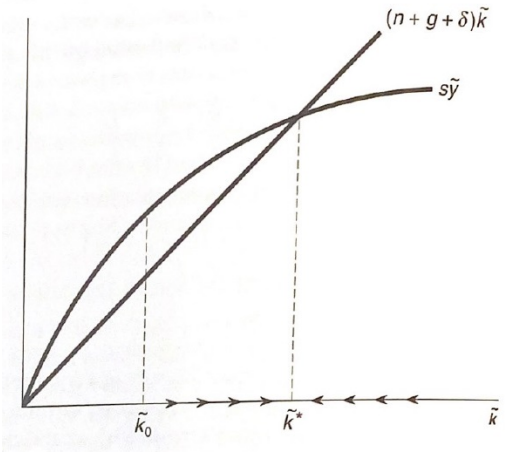
Como el primer término es constante en estado estacionario, vemos directamente que el crecimiento de la producción debe ser $n + g$.

¿Qué sucede fuera del estado estacionario?

Por lo tanto, tenemos un modelo que es consistente con los hechos de Kaldor una vez que la economía está en estado estacionario. Sin embargo, también nos gustaría entender cómo se comporta la economía fuera del estado estacionario:

- Nada garantiza que una economía en particular esté en estado estacionario en un año en particular.
- Nos permite estudiar cómo la economía se mueve de un estado estacionario a otro si los parámetros cambian.
- De hecho, veremos que la dinámica externa del estado estacionario nos permite entender los milagros del crecimiento.

¿Hay convergencia al estado estacionario?



Recordemos la ecuación de acumulación de capital por trabajadora eficiente:

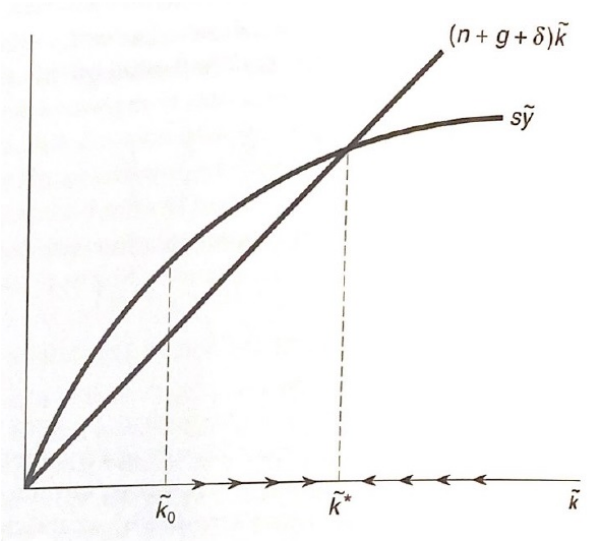
$$\dot{\tilde{k}}(t) = s\tilde{k}(t)^{\alpha} - (n+g+\delta)\tilde{k}(t). \tag{45}$$

$$s\tilde{k}(t)^{\alpha} > (n+g+\delta)\tilde{k}(t) \text{ if } \tilde{k}(t) < \tilde{k}^* \tag{46}$$

$$s\tilde{k}(t)^{\alpha} < (n+g+\delta)\tilde{k}(t) \text{ if } \tilde{k}(t) > \tilde{k}^*. \tag{47}$$

Por lo tanto, convergemos al estado estacionario desde cualquier punto de partida $\tilde{k}(0) > 0$.

Intuición para la convergencia



$$s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} = \frac{s}{\alpha} PMK(t) > (n+g+\delta) \text{ if } \tilde{k}(t) < \tilde{k}^* \tag{48}$$

$$s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} = \frac{s}{\alpha} PMK(t) < (n+g+\delta) \text{ if } \tilde{k}(t) > \tilde{k}^*. \tag{49}$$

Con poco capital, el producto marginal del capital es alto y los ahorros superan la depreciación efectiva. Lo contrario ocurre cuando el capital es demasiado alto.

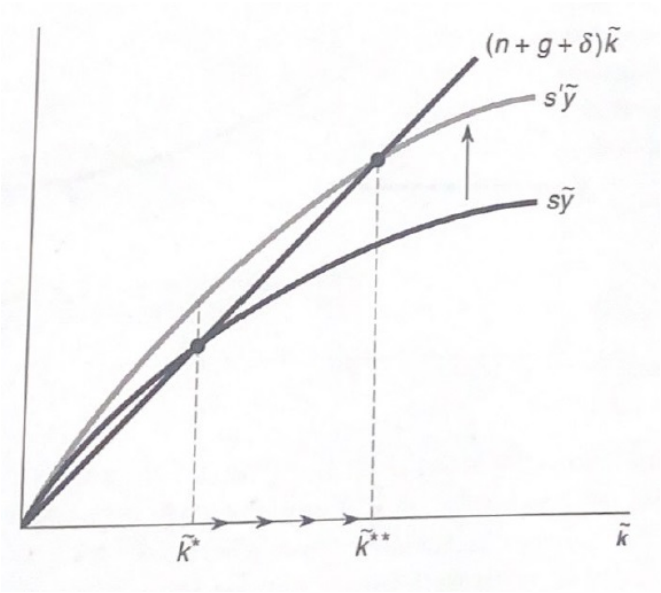
Convergencia al estado estacionario

Veremos que podemos resolver el camino de convergencia explícitamente en términos de la relación capital/producto:

$$\underbrace{\tilde{k}(t)^{1-\alpha}}_{\frac{K(t)}{Y(t)}=\frac{\alpha}{PMK(t)}} = \frac{s}{n+g+\delta} - \left[\underbrace{\frac{s}{n+g+\delta}}_{\left(\frac{\tilde{k}}{\tilde{y}}\right)^*=\left(\frac{K}{Y}\right)^*} - \tilde{k}(0)^{1-\alpha}\right] \exp(-\beta t). \qquad (50)$$

- $\tilde{k}(t)^{1-\alpha} - \frac{s}{n+g+\delta}$ converge a cero a una tasa $\beta = (1-\alpha)(n+g+\delta)$.
- En palabras: La brecha absoluta entre la relación capital-producto y su estado estacionario se desvanece a una tasa β.
- La tasa de crecimiento (absoluta) es mayor cuanto más se aleja la economía del estado estacionario (cuanto más diferente sea $MPK(t)$).

Estática comparativa: Un aumento en la tasa de ahorro



Una forma de obtener un estado estacionario más alto es una tasa de ahorro más alta. Para cualquier nivel de $\tilde{k}(t)$, $s\tilde{y}(t) = s\tilde{k}(t)^{\alpha}$ aumenta. El nuevo estado estacionario se asocia con un mayor $\tilde{k}^*$ y, por lo tanto, un mayor $\tilde{y}^*$. Se deduce directamente que la producción per cápita también es mayor en el nuevo estado estacionario.

Estática comparativa: Un aumento en la tasa de ahorro II

Tenga en cuenta, en el estado estacionario antiguo y nuevo, $\tilde{y}^*$ son constantes y, por lo tanto, la producción per cápita crece en cada caso a una tasa g. Es decir, la tasa de ahorro cambia el nivel de producción per cápita en estado estacionario, pero no su tasa de crecimiento. Sin embargo, en la ruta de transición al nuevo estado estacionario, $\tilde{y}$ no es constante. Para ver esto, considere

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \frac{\dot{\tilde{y}}(t)}{\tilde{y}(t)} = g + \alpha \frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)}. \tag{51}$$

De la ecuación de acumulación de capital:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - (n + g + \delta). \tag{52}$$

Durante la transición, $s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} > n + g + \delta$ y, por lo tanto, crece el capital por trabajadora eficiente.

El camino de transición: un aumento de la tasa de ahorro

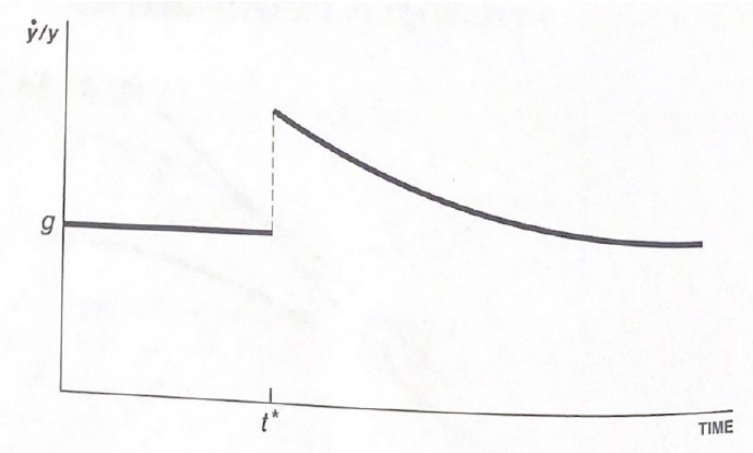
Dada nuestra solución para $\tilde{k}(t)^{1-\alpha}$, podemos calcular todo el camino de transición:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - (n+g+\delta) \tag{53}$$

$$= \frac{s}{\frac{s}{n+g+\delta} - \left[\frac{s}{n+g+\delta} - \tilde{k}(0)^{1-\alpha}\right]\exp(-\beta t)} - (n+g+\delta). \tag{54}$$

A medida que pasa el tiempo, la distancia $\frac{s}{n+g+\delta} - \tilde{k}(t)^{1-\alpha}$ se hace más pequeña. Es decir, el denominador se hace más grande y $\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)}$ se ralentiza.

Crecimiento de la producción por trabajador fuera del estado estacionario

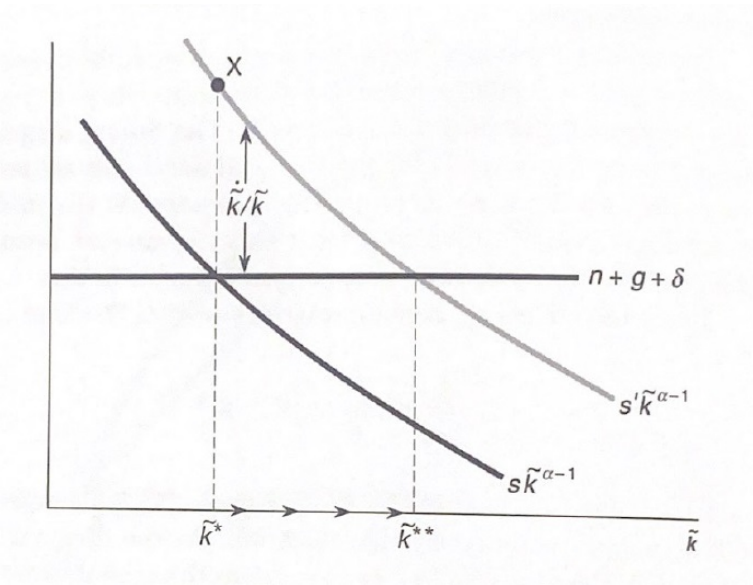


La economía acumula capital rápidamente inicialmente, y la producción per cápita está creciendo rápidamente inicialmente:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \frac{\dot{\tilde{y}}(t)}{\tilde{y}(t)} = g + \alpha \frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)}. \tag{55}$$

A medida que la acumulación de capital se desacelera, también lo hace el crecimiento de la producción per cápita.

El camino de transición: Una representación gráfica



Nota, $\tilde{k}(t)^{\alpha-1}$ es una función convexa con pendiente descendente. Por lo tanto, la distancia entre $s\tilde{k}(t)^{\alpha-1}$ y $(n+g+\delta)$ es mayor en el primer período del ajuste. Esto es el resultado de la disminución de los rendimientos marginales del capital.

Crecimiento de la producción por trabajador y la relación capital/producción

Podemos utilizar de nuevo nuestra reescritura de la función de producción para resaltar de nuevo el papel clave que juega la relación capital/producto en el modelo de Solow:

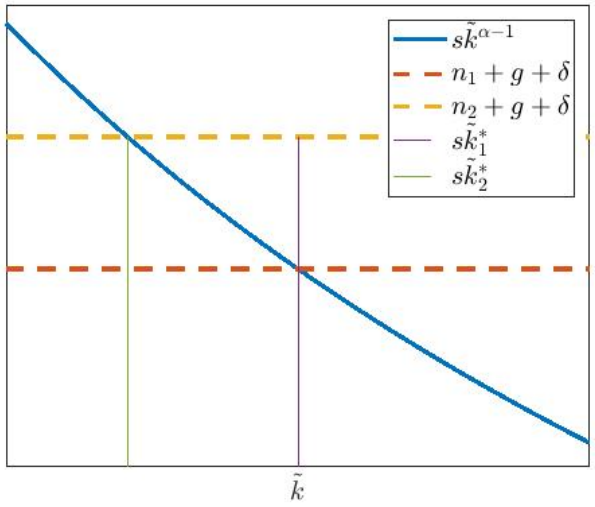
$$Y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)L(t) \tag{56}$$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t) \tag{57}$$

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \frac{\alpha}{1-\alpha} g_{\frac{K(t)}{Y(t)}}. \tag{58}$$

Es decir, el crecimiento de la producción por trabajador superior a g debe ser el resultado de una relación capital / producción creciente.

Estática comparativa: Un aumento en la tasa de crecimiento de la población



El nuevo estado estacionario se asocia con un $\tilde{k}^*$ más bajo y, por lo tanto, un $\tilde{y}^*$ más bajo. Se deduce directamente que la producción per cápita también es menor en el nuevo estado estacionario.

Estática comparativa: Un aumento en la tasa de crecimiento de la población II

Consideremos de nuevo la ecuación de acumulación de capital

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} - (n+g+\delta). \tag{59}$$

Durante la transición, $s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} < n+g+\delta$ y, por lo tanto, el capital por trabajador eficiente se reduce. Como consecuencia, la producción per cápita está creciendo a una tasa inferior a g durante la fase de transición.

Introducción del capital humano

Por qué el capital humano

Hasta ahora, asumimos que todos los trabajadores son igualmente productivos a través del tiempo y los países. Sin embargo

- el número promedio de años de escolaridad varía sustancialmente dentro de un país a lo largo del tiempo y entre países.
- la calidad de la escolarización varía sustancialmente dentro de un país a lo largo del tiempo y entre países.
- dentro de un país en un momento dado, las diferencias de ingresos entre los grupos de educación son grandes, lo que sugiere que la educación es importante para la productividad.

Producción

Para introducir el capital humano, hacemos un pequeño cambio en la función de producción:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \left(A(t)H(t)\right)^{1-\alpha} \tag{60}$$

$$H(t) = \exp(\psi\, u)L(t), \tag{61}$$

donde $L(t)$ es la cantidad de trabajo, y $H(t)$ es la cantidad de capital humano total. El capital humano total no solo depende de la cantidad de mano de obra sino también del tiempo invertido en el aprendizaje, u.

Calidad del aprendizaje

Tenga en cuenta que

$$\frac{\partial H(t)}{\partial u} = \psi \exp(\psi\, u) L(t) = \psi H(t) \tag{62}$$

$$\frac{\partial \ln H(t)}{\partial u} = \psi. \tag{63}$$

Es decir, un cambio en u se traduce en ψ por ciento más de capital humano. Una forma de interpretar ψ es pensar en la calidad del sistema educativo durante un tiempo fijo en él.

Estado estacionario

Necesitamos definir de nuevo una variable que tiene un estado estacionario. Volveremos a definir:

$$\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{64}$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = \tilde{k}(t)^{\alpha} \left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} \tag{65}$$

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital

$$\dot{K}(t) = sK(t)^{\alpha}\left(A(t)H(t)\right)^{1-\alpha} - \delta K(t) \tag{66}$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1}\left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} - \delta \tag{67}$$

Necesitamos encontrar de nuevo una expresión para $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}$.

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital II

Tenga en cuenta que

$$\tilde{k} = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{68}$$

$$\ln \tilde{k} = \ln K(t) - \ln A(t) - \ln L(t) \tag{69}$$

Ahora tomemos la derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{70}$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g - n \tag{71}$$

Reescribiendo la ecuación de acumulación de capital III

Combinando las ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} + n + g = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1}\left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} - \delta \tag{72}$$

$$\dot{\tilde{k}}(t) = s\tilde{k}(t)^{\alpha}\left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} - (n + g + \delta)\tilde{k}(t). \tag{73}$$

Tenga en cuenta que este es casi el mismo sistema dinámico que en el modelo sin capital humano. La única diferencia es el término de educación adicional.

Resolviendo para el estado estacionario

Resolviendo para el estado estacionario:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp(\psi u) \tag{74}$$

$$\tilde{y}^* = \tilde{k}(t)^{\alpha} \left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \exp(\psi u) \tag{75}$$

$$\tilde{c}^* = (1-s)\tilde{y}^* = (1-s)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \exp(\psi u). \tag{76}$$

Producción per cápita en estado estacionario

Por lo tanto, la producción por trabajador en estado estacionario es:

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = \left(\underbrace{\frac{s}{n+g+\delta}}_{\left(\frac{K}{Y}\right)^*}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)\exp(\psi\, u) \tag{77}$$

La producción per cápita está aumentando en la cantidad de educación. Una fuerza laboral más educada es más productiva y, por lo tanto, permite que cada trabajador produzca más.

Crecimiento en estado estacionario

Podemos preguntar de nuevo sobre la tasa de crecimiento en estado estacionario. Como se supone que la educación es constante, nada cambia realmente:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{78}$$

$$\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}\right)^* = n + g \tag{79}$$

$$\left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\right)^* = g. \tag{80}$$

Es decir, el capital per cápita (y la producción/consumo per cápita) crece al ritmo del progreso tecnológico.

Dinámica de transición

Ya hemos visto que los cambios en las tasas de crecimiento de la población y las tasas de ahorro pueden tener una rica dinámica de transición para la producción por trabajador. Ahora también podemos analizar los cambios en la educación. En general, la producción por trabajador es:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \tilde{k}(t)^{\alpha} A(t) \left(\exp(\psi\, u)\right)^{1-\alpha} \tag{81}$$

El aumento del tiempo dedicado a la educación, u, o la calidad de la educación, ψ, tiene un impacto de nivel inicial en la producción por trabajador de $\left(\exp(\psi\, u)\right)^{1-\alpha}$.

Dinámica de transición II

La tasa de crecimiento de la producción por trabajador fuera del estado estacionario es:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \alpha \frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} + g. \tag{82}$$

A partir del crecimiento del capital por trabajador eficiente sabemos que el aumento del producto marginal del capital conduce a una acumulación adicional de capital:

$$\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} = s\tilde{k}(t)^{\alpha-1} \left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} - (n + g + \delta) > 0. \tag{83}$$

Siguiendo la misma lógica que antes, el capital (producción) por trabajador crece particularmente rápido inicialmente. Por lo tanto, el aumento de la educación conduce a un período de rápida acumulación de capital y crecimiento de la producción.

¿Cuánto debemos ahorrar?

Hasta ahora, tomamos la tasa de ahorro como dada. Uno puede preguntarse si hay una tasa de ahorro óptima. Una posibilidad para definir óptimo es la tasa de ahorro que maximiza el consumo a largo plazo por trabajador:

$$\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right)^* = (1-s)\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = (1-s)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)\exp(\psi\, u) \tag{84}$$

Como la productivitz y el capital humano siguen procesos exógenos, esto equivale a maximizar el consumo por trabajador eficiente:

$$\tilde{c}^* = (1-s)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \exp(\psi u). \tag{85}$$

La tasa de ahorro resultante se conoce como la regla de oro s_{Gold}.

Regla de oro

Tomando la condición de primer orden de (84):

$$s_{Gold} = \alpha. \tag{86}$$

Intuición: Cuanto más importante es el capital en la función de producción, más debemos ahorrar.

La economía detrás de la regla de oro

En estado estacionario, una alternativa para escribir el problema es:

$$\tilde{c}^* = \tilde{y}^* - (n + g + \delta)\tilde{k}^*. \tag{87}$$

Ahora tome el derivado con respecto al stock de capital en estado estacionario por trabajador eficiente:

$$\alpha(\tilde{k}^*)^{\alpha-1}\left(\exp(\psi u)\right)^{1-\alpha} = n + g + \delta \tag{88}$$

$$PMK = n + g + \delta. \tag{89}$$

La ganancia marginal del ahorro debe ser igual a su costo marginal (la tasa de depreciación efectiva).

¿Estamos ahorrando lo suficiente?

Para evaluar si España tiene una tasa de ahorro consistente con la regla de oro, considere los siguientes datos

1. El coeficiente de producción de capital es 2.75: $k = 2.75y$.
2. La depreciación del capital es del 10 por ciento de la producción anual: $\delta k = 0.1y$.
3. La participación del capital en los ingresos es 30%
4. El crecimiento de la producción es 3%.

¿Estamos ahorrando lo suficiente? II

La combinación de 1 y 2 nos dice que la tasa de depreciación es 3.6%.

Según nuestro modelo, 3 implica $PMK^* k = 0.3y$. Combinando con 1 tenemos $PMK = 0.11$.

Según nuestro modelo, 4 implica $n + g = 0.03$.

Por lo tanto, $PMK > n + g + \delta$, es decir, ahorramos a poco.

¿Podemos racionalizar un PMK alto?

Podemos sacar dos posibles conclusiones de un alto PMK:

1. O bien necesitamos cambiar los incentivos de ahorro. La reforma del sistema de pensiones es un aspecto que los economistas han defendido.
2. O optimizar el consumo a largo plazo por trabajador no es óptimo. Si descontamos el consumo futuro en relación con el consumo actual, la regla de oro no es óptima. Se necesitaría una tasa de descuento anual de más del 4% para explicar los altos rendimientos de capital.

Volviendo a nuestras tres grandes preguntas

1. ¿Por qué somos tan ricos y ellos tan pobres?
   - Diferentes tasas de ahorro, tasas de crecimiento de la población, niveles de educación y niveles de tecnología.
2. ¿Por qué hay milagros de crecimiento?
   - Rápida acumulación de capital físico o aumentos en el capital humano.
3. ¿Cuáles son los motores del crecimiento económico a largo plazo?
   - Progreso tecnológico.

Referencias

Herrendorf, B., R. Rogerson, and A. Valentinyi (2019): "Growth and the kaldor facts," *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*.

Kaldor, N. (1961): "Capital accumulation and economic growth," in *The theory of capital*, Springer, 177–222.

Solow, R. M. (1956): "A contribution to the theory of economic growth," *The quarterly journal of economics*, 70, 65–94.