Introducción y fundamentos matemáticos

Felix Wellschmied

Universidad Carlos III de Madrid

Crecimiento Económico

Información práctica

Felix Wellschmied

Oficina: 15.2.33

Horario de oficina: Viernes de 10:00 a 12:00 o con cita previa.

fwellsch@eco.uc3m.es

Clasificación

Examen final 50%.

2 parciales 40-50%.

Participación durante los reducidos 0-10%.

- Llamados aleatorios a los estudiantes sobre material magistral anterior.
- La probabilidad de ser llamado disminuye en el número de llamadas pasadas.
- Obtienes un 0 si no estás allí cuando te llamo.
- Si (y solo si) nunca te llamo, el peso pasa a los exámenes parciales.
- Presentar ejercicios o terminar los ejercicios de computadora rápidamente también cuenta como participación.

Fundamentos

Para estudiar la teoría, necesitamos algunos antecedentes matemáticos.

No tendremos tiempo para cubrir todos los conceptos básicos. Para aquellos que se pierdan algunos de ellos, recomiendo revisar los siguientes temas de Sydsæter and Hammond (2021) y Larson and Edwards (2016) que pueden encontrar en nuestra biblioteca:

- Trabajar con funciones exponenciales (Capítulo 4.9 (SH), 5.4 (LE))
- Trabajar con funciones logarítmicas (Capítulo 4.10 (SH), 5.1 (LE))
- Funciones inversas (Capítulo 5.3 (SH)+(LE))
- Diferenciación (Capítulo 6 (SH), 2 (LE))
- Optimización (Capítulo 9 (SH), 3 (LE))
- Integración (Capítulo 10.1-10.3 (SH), 4 (LE))

Introducción a tiempo continuo

Como nos interesan las variables a lo largo del tiempo, a menudo escribiremos explícitamente la dependencia del tiempo. Por ejemplo, la producción, Y, en el período t se escribirá como $Y(t)$.

Esto plantea la cuestión de cómo lidiar con los cambios a lo largo del tiempo y qué duración toma un período. Matemáticamente, será conveniente pensar en un período de tiempo de duración cercano a cero. Por lo tanto, el cambio de una variable a lo largo del tiempo (denotado por un punto) es simplemente la derivada con respecto al tiempo:

$$\dot{Y}(t) = \frac{dY(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Y(t) - Y(t - \Delta t)}{\Delta t}. \tag{1}$$

Crecimiento exponencial

Veremos que en el tiempo continuo, una tasa de crecimiento porcentual constante implica un crecimiento exponencial de la variable. Comenzando con la tasa de crecimiento porcentual, tenemos

$$\frac{Y(t) - Y(t - \Delta t)}{Y(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \tag{2}$$

Tenemos que $Y(t)$ tiene una tasa de crecimiento constante cuando

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = g_Y. \tag{3}$$

Crecimiento exponencial II

Esta ecuación es una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\frac{dY(t)}{dt}}{Y(t)} = g_Y, \tag{4}$$

que podemos resolver:

$$\frac{1}{Y(t)}\frac{dY(t)}{dt} = g_Y \tag{5}$$

$$\int \frac{1}{Y(t)} dY(t) = \int g_Y dt \tag{6}$$

$$\ln Y(t) = t g_Y + k; \qquad \ln Y(0) = k \tag{7}$$

$$Y(t) = Y(0)\exp(t g_Y). \tag{8}$$

Por lo tanto, el hecho de que $Y(t)$ tenga una tasa de crecimiento constante implica que $Y(t)$ crece exponencialmente a una tasa g_Y.

Crecimiento lineal

El tiempo continuo también hace que la comparación entre el crecimiento exponencial y lineal sea muy transparente. Crecimiento lineal implica

$$Y(t) = Y(0) + tg_L \tag{9}$$

$$\dot{Y}(t) = g_L \tag{10}$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{g_L}{Y(t)} \tag{11}$$

Es decir, una economía que experimenta un crecimiento lineal tiene una tasa de crecimiento que converge a cero a medida que avanza el tiempo.

Crecimiento geométrico

El tiempo continuo también hace que la comparación entre crecimiento exponencial y geométrico sea muy transparente. Crecimiento geométrico implica

$$Y(t) = Y(0)(1+g_g)^t \tag{12}$$

$$\dot{Y}(t) = Y(0)(1+g_g)^t \ln(1+g_g) \tag{13}$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \ln(1+g_g) < g_g \tag{14}$$

Es decir, una economía que experimenta un crecimiento geométrico está creciendo a una tasa constante, pero la tasa es menor que con un crecimiento exponencial.

Cálculo de las tasas de crecimiento en tiempo continuo

Para nuestro análisis, la siguiente propiedad de tiempo continuo a menudo resultará útil. Supongamos que tenemos

$$y(t) = \ln x(t). \tag{15}$$

Entonces:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dx(t)} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{x(t)} \dot{x}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = g_x, \tag{16}$$

porque $\frac{dy(t)}{dx(t)} = 1/x(t)$ y $\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$. Es decir, la derivada de una variable en logaritmos con respecto al tiempo es la tasa de crecimiento de esa variable:

$$\frac{d \ln Y(t)}{dt} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}. \tag{17}$$

Ejemplos

Un ejemplo sencillo con crecimiento exponencial:

$$Y(t) = Y(0)\exp(tg_Y) \tag{18}$$

$$\ln Y(t) = \ln Y(0) + tg_Y \tag{19}$$

$$\frac{d \ln Y(t)}{dt} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = g_Y. \tag{20}$$

Un ejemplo sencillo con crecimiento lineal:

$$Y(t) = Y(0) + tg_L \tag{21}$$

$$\ln Y(t) = \ln(Y(0) + tg_L) \tag{22}$$

$$\frac{d \ln Y(t)}{dt} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{g_L}{Y(0) + tg_L}. \tag{23}$$

Ejemplos II

Un ejemplo sencillo con crecimiento geométrico:

$$
\begin{align}
Y(t) &= Y(0)(1+g_g)^t \tag{24}\\
\ln Y(t) &= \ln Y(0) + t\ln(1+g_g) \tag{25}\\
\frac{d\ln Y(t)}{dt} &= \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \ln(1+g_g). \tag{26}
\end{align}
$$

References

Larson, R. and B. Edwards (2016): *Calculus*, Cengage Learning, 10ª ed. ed.

Sydsæter, K. and P. J. Hammond (2021): *Essential mathematics for economic analysis*, Pearson Education.