Una evaluación cuantitativa del modelo de Solow

Felix Wellschmied

Universidad Carlos III de Madrid

Crecimiento Económico

Introducción

El modelo de Solow hace predicciones sobre:

- Diferencias del estado estacionario en el ingreso per cápita entre países.
- El comportamiento del crecimiento en estado estacionario.
- Los fenómenos de los milagros/desastres del crecimiento.
- Convergencia del ingreso per cápita entre países.

Podemos probar estas predicciones.

Medición

Voy a utilizar datos del Penn World Tables.

Para medir $1 - \alpha$, utilizo la participación laboral de cada país, que puede variar con el tiempo.

Para medir la cantidad de trabajo, multiplico el número de trabajadores por el promedio de horas trabajadas. Esto permite a los países diferir en el número de horas trabajadas por persona, lo que considero exógeno.

Diferencias en el estado estacionario en la producción per cápita

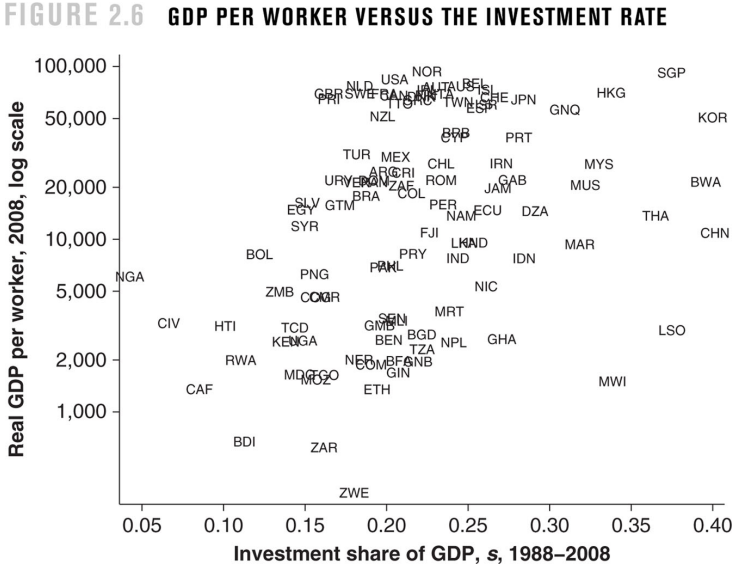
Diferencias en el estado estacionario en la producción per cápita

El modelo de Solow hace algunas predicciones clave sobre el nivel de producción por trabajador en todos los países:

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \exp(\psi\, u) A(t) \tag{1}$$

- La producción per cápita está aumentando en la tasa de ahorro: $s = \frac{I}{Y}$.
- La producción per cápita está disminuyendo en la tasa de crecimiento de la población.
- La producción per cápita está aumentando en los niveles educativos.
- La producción per cápita está aumentando en productividad (PTF).

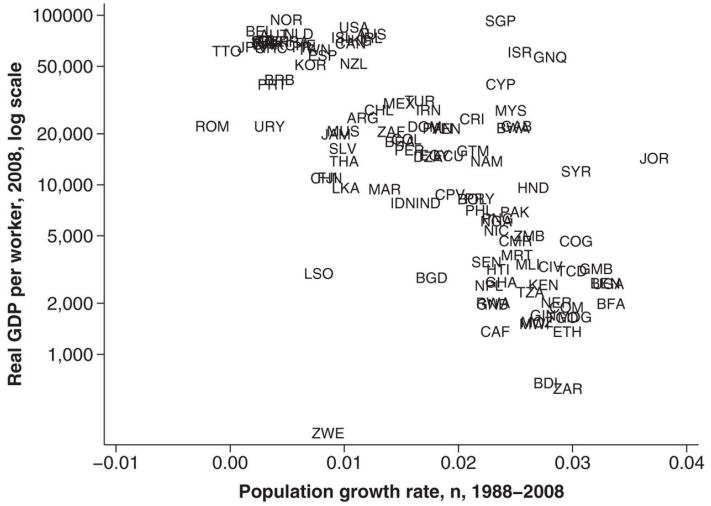
PIB per cápita y tasa de ahorro



De hecho, encontramos una correlación positiva entre la tasa de inversión y la PIB per cápita.

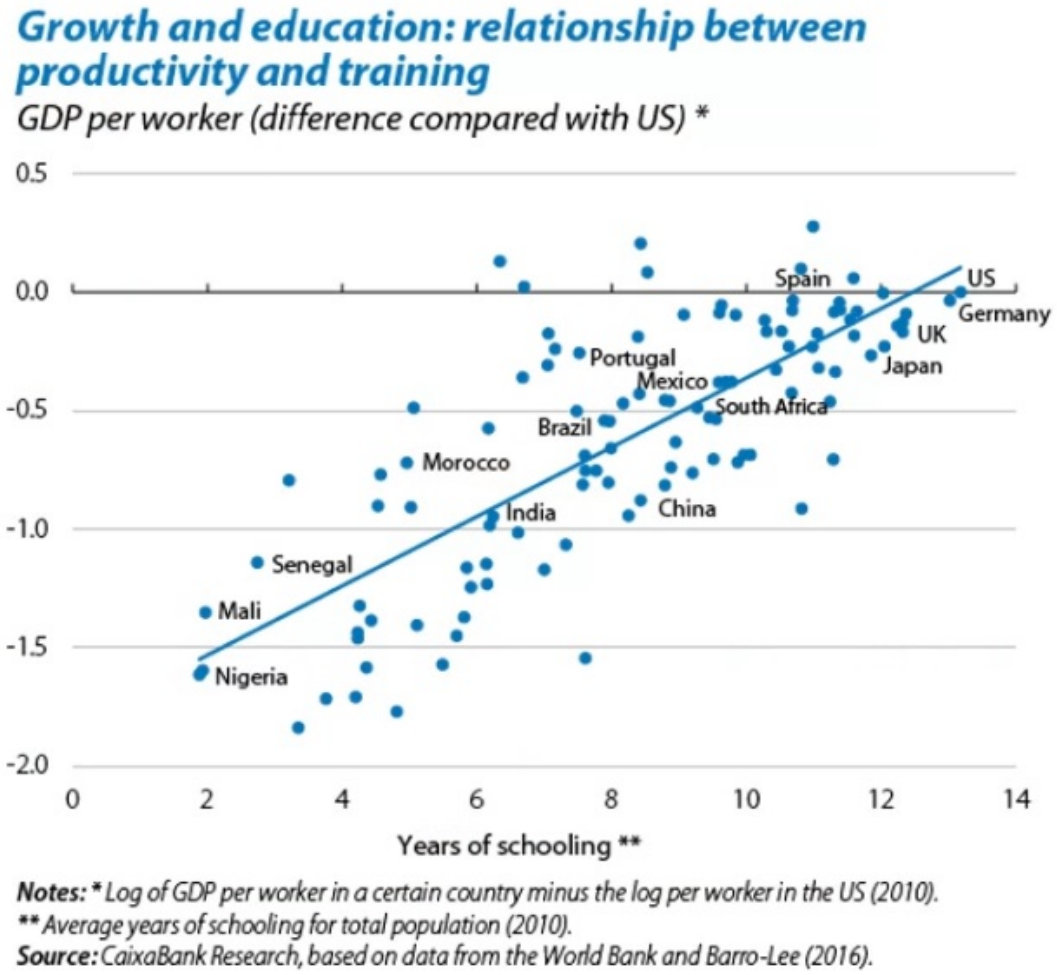
PIB per cápita y tasa de crecimiento de la población

FIGURE 2.7 **GDP PER WORKER VERSUS POPULATION GROWTH RATES**



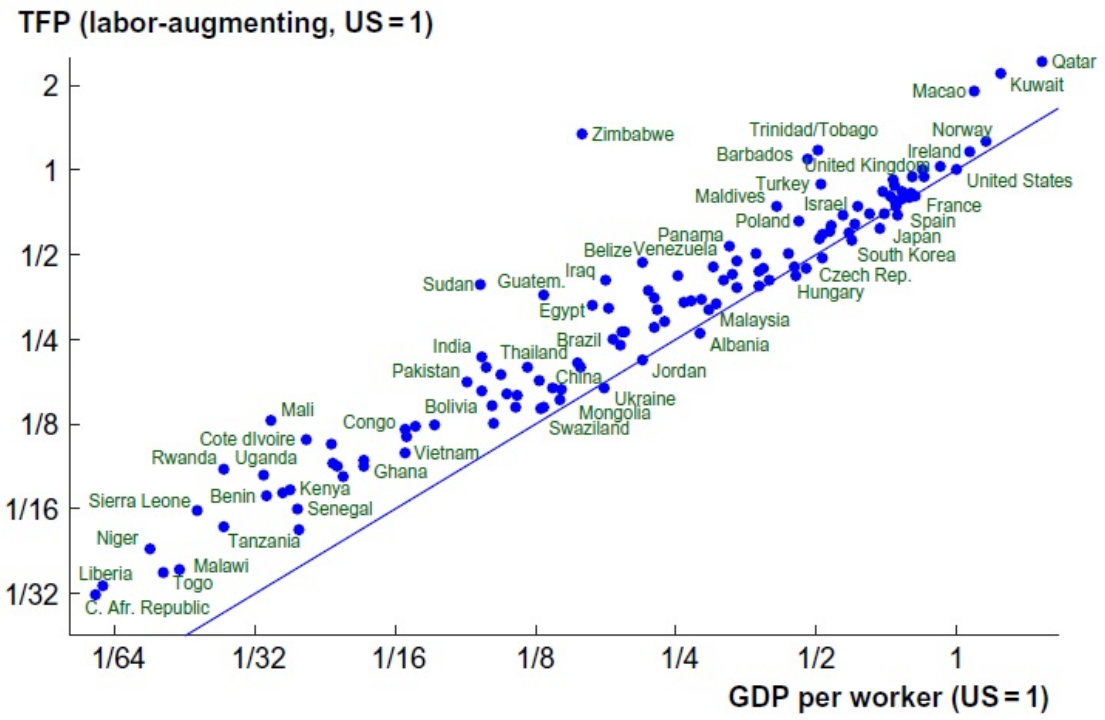
De hecho, encontramos una correlación negativa entre la tasa de crecimiento de la población y la PIB per cápita.

PIB per cápita y niveles educativos



De hecho, encontramos una correlación positiva entre los niveles educativos y el PIB per cápita.

PIB per cápita y productividad



De hecho, encontramos una correlación positiva entre la productividad y el PIB per cápita. Tenga en cuenta que los países pobres son "demasiado productivos", es decir, tienen "muy poco" capital.

Una evaluación cuantitativa

En lugar de simplemente mirar cualitativamente los datos, Mankiw et al. (1992) evaluan el rendimiento cuantitativo del modelo. Suponiendo que todos los países están en estado estacionario, parten de:

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = A(t)\exp(\psi\, u)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{2}$$

$$y(t)^* = A(0)\exp(gt)\exp(\psi\, u)\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{3}$$

$$\ln y(t)^* = \ln A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln s - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+g+\delta) + \psi\, u \tag{4}$$

Suponiendo que $\ln A(0) + gt = \beta_0 + \epsilon$, es decir, el nivel de tecnología es aleatorio entre países, y $g + \delta = 0.05$ esto se puede estimar mediante OLS lineal:

$$\ln y(t) = \beta_0 + \beta_1 \ln s + \beta_2 \ln(n + 0.05) + \beta_3 u + \epsilon(t). \tag{5}$$

Una evaluación cuantitativa II

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	6.89	7.81	8.63
	(1.17)	(1.19)	(2.19)
ln(I/GDP)	0.69	0.70	0.28
	(0.13)	(0.15)	(0.39)
$\ln(n + g + \delta)$	−1.73	−1.50	−1.07
	(0.41)	(0.40)	(0.75)
ln(SCHOOL)	0.66	0.73	0.76
	(0.07)	(0.10)	(0.29)
$\bar{R}^2$	0.78	0.77	0.24

- Las tres variables juntas explican casi el 80% en la variación entre países en el PIB per cápita.
- Todos los coeficientes tienen el signo esperado.
- El α implícito es razonable.
- Sin embargo, los datos rechazan $\beta_1 = -\beta_2$.

Inconvenientes del modelo de regresión lineal

El enfoque del modelo de regresión lineal tiene varios inconvenientes:

- La endogeneidad de las variables es un problema grave. Los inobservables, como la capacidad de gestión, probablemente estén correlacionados con la educación (y las tasas de ahorro).
- Tenemos que asumir un estado estacionario.
- El modelo de regresión elige los coeficientes que mejor se ajustan a los datos, pero pueden no ser razonables económicamente.
- El R^2 no nos dice qué parte de la distribución encaja bien el modelo de regresión.

Contabilidad del desarrollo

La contabilidad del desarrollo es un enfoque alternativo para preguntar qué tan bueno es el modelo de Solow para explicar las diferencias de ingresos entre países. Relaciona los insumos observables con el PIB per cápita a través de la función de producción:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} \left(A(t)H(t)\right)^{1-\alpha} \tag{6}$$

$$Y(t)^{1-\alpha} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\alpha} \left(A(t)H(t)\right)^{1-\alpha} \tag{7}$$

$$Y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)H(t) \tag{8}$$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)\exp(\psi u). \tag{9}$$

Tenga en cuenta que cualquier diferencia entre países en s o n, el corazón del modelo de Solow, debe reflejarse en la relación entre la producción y el capital.

Contabilidad del desarrollo II

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)\exp(\psi u). \tag{10}$$

- Vamos a asumir $\alpha = 0.3$.
- Utilizamos microestimaciones del retorno a la escolaridad para ψ.
- Nota, a diferencia del marco de regresión lineal, ahora fijamos valores para α y ψ en lugar de dejar que la regresión elija los que mejor se ajusten a los datos. Además, no imponemos que todas las economías estén en estado estacionario, es decir, que la función de producción se mantenga dentro y fuera del estado estacionario.

Contabilidad del desarrollo III

Tomando como referencia a los Estados Unidos, podemos preguntar qué factor explica las diferencias en la producción per cápita en relación con los Estados Unidos:

$$\frac{y(t)}{y^{US}(t)} = \frac{\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\frac{K^{US}(t)}{Y^{US}(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \frac{A(t)}{A^{US}(t)} \exp(\psi(u - u^{US})). \tag{11}$$

Por ejemplo, Estados Unidos tiene alrededor de 11 años de escolaridad, mientras que los países más pobres tienen solo 3. Con un retorno de la escolaridad del 10%, tenemos:

$$\exp(0.1(3 - 11)) = 0.45, \tag{12}$$

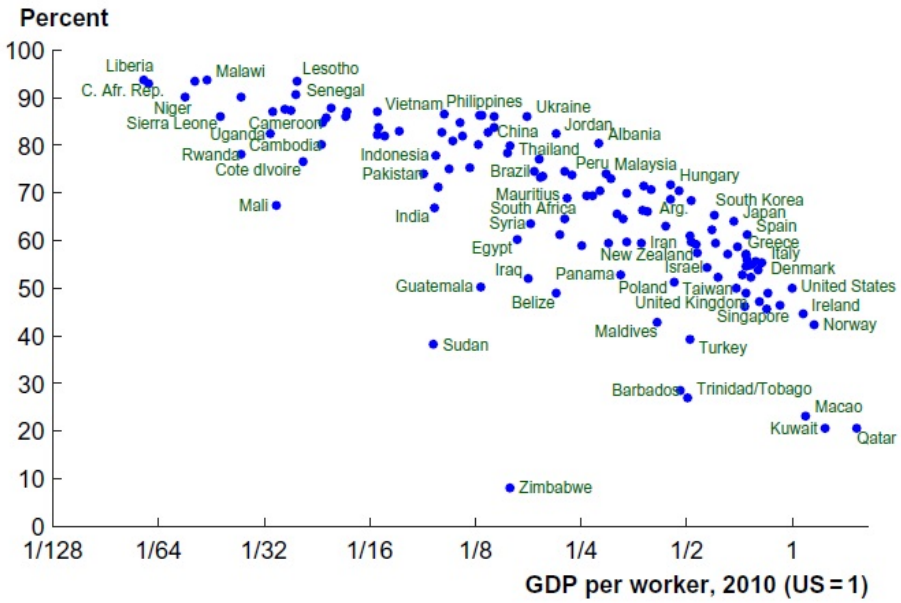
es decir, las diferencias en la educación pueden explicar una producción per cápita 55% menor en los países más pobres.

Contabilidad del desarrollo IV

	GDP per worker, y	Capital/GDP $(K/Y)^{\alpha/(1-\alpha)}$	Human capital, h	TFP	Share due to TFP
United States	1.000	1.000	1.000	1.000	–
Hong Kong	0.854	1.086	0.833	0.944	48.9%
Singapore	0.845	1.105	0.764	1.001	45.8%
France	0.790	1.184	0.840	0.795	55.6%
Germany	0.740	1.078	0.918	0.748	57.0%
United Kingdom	0.733	1.015	0.780	0.925	46.1%
Japan	0.683	1.218	0.903	0.620	63.9%
South Korea	0.598	1.146	0.925	0.564	65.3%
Argentina	0.376	1.109	0.779	0.435	66.5%
Mexico	0.338	0.931	0.760	0.477	59.7%
Botswana	0.236	1.034	0.786	0.291	73.7%
South Africa	0.225	0.877	0.731	0.351	64.6%
Brazil	0.183	1.084	0.676	0.250	74.5%
Thailand	0.154	1.125	0.667	0.206	78.5%
China	0.136	1.137	0.713	0.168	82.9%
Indonesia	0.096	1.014	0.575	0.165	77.9%
India	0.096	0.827	0.533	0.217	67.0%
Kenya	0.037	0.819	0.618	0.073	87.3%
Malawi	0.021	1.107	0.507	0.038	93.6%
Average	0.212	0.979	0.705	0.307	63.8%
1/Average	4.720	1.021	1.418	3.260	69.2%

- La gran mayoría de las diferencias de ingresos se deben a las diferencias de PTF.
- Las relaciones capital/producción son relativamente similares entre los países.

Contabilidad del desarrollo V



- Las diferencias de PTF son importantes para todos los países.
- Las diferencias en la PTF explican casi todas las diferencias de ingresos de los países más pobres.

Contabilidad del desarrollo VI

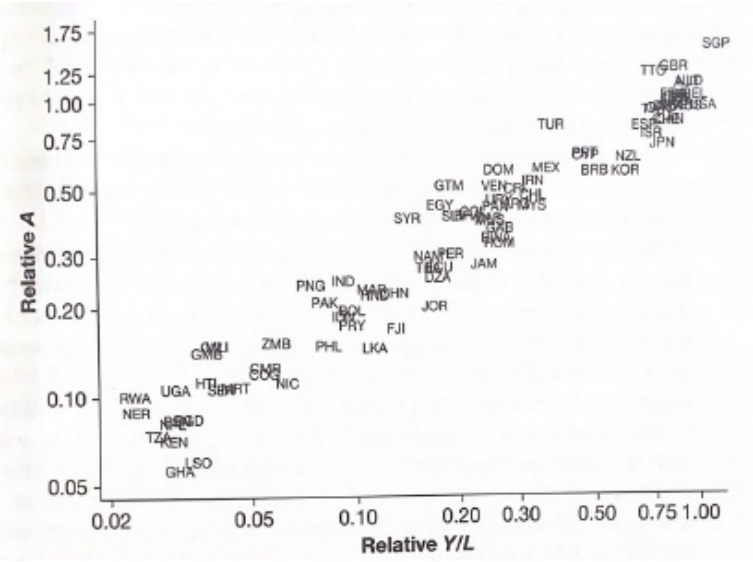
Una forma diferente de ver el mismo punto es reescribir:

$$y(t) = \left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(t)\exp(\psi u) \tag{13}$$

$$A(t) = \left(\frac{Y(t)}{K(t)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{y(t)}{\exp(\psi u)}, \tag{14}$$

es decir, preguntar qué nivel de tecnología requerimos para explicar la producción per cápita observada. Vamos a expresar esto de nuevo en relación con los EE.UU.

Contabilidad del desarrollo VII



Como era de esperar, existe una fuerte correlación entre el producto per cápita y la PTF inferida, es decir, otros factores explican relativamente poco.

Crecimiento en estado estacionario a lo largo del tiempo

Crecimiento en estado estacionario a lo largo del tiempo

- Hasta ahora, hemos analizado las diferencias entre países en la producción per cápita.
- Ahora vamos a ver qué explica el crecimiento dentro de un país a lo largo del tiempo que es en su estado estacionario.
- Hemos visto que el modelo de Solow es consistente con todos los hechos de Kaldor.
- Aquí veremos otras implicaciones del modelo.

Descomponiendo producción a lo largo del tiempo

Seguimos el marco propuesto por Solow (1957). Similar a la contabilidad de desarrollo, comenzamos de nuevo con la función de producción agregada:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha(t)} \left(A(t)H(t)\right)^{1-\alpha(t)} \tag{15}$$

$$H(t) = L(t) \exp(\psi\, u(t)). \tag{16}$$

Tenga en cuenta que ahora permitimos que la educación y α varíen en el tiempo. Ahora tome logaritmos y tome la derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \alpha(t)\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + (1-\alpha(t))\left[\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \psi\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right]. \tag{17}$$

Producción a lo largo del tiempo II

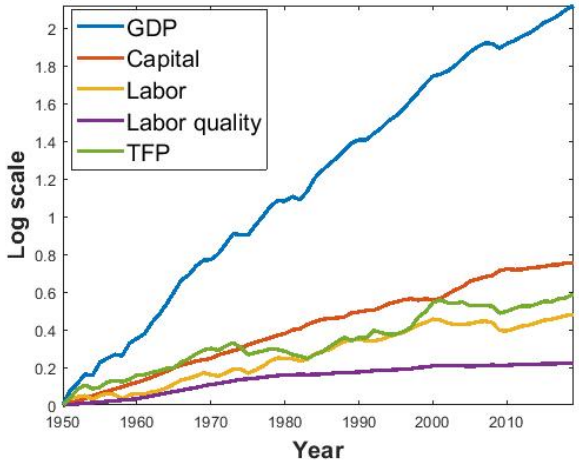
En lugar de la producción total, también podemos mirar la producción per cápita:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha(t)} (A(t)\exp(\psi\, u(t)))^{1-\alpha(t)} \tag{18}$$

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \alpha(t)\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} + (1-\alpha(t))\left[\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \psi\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right]. \tag{19}$$

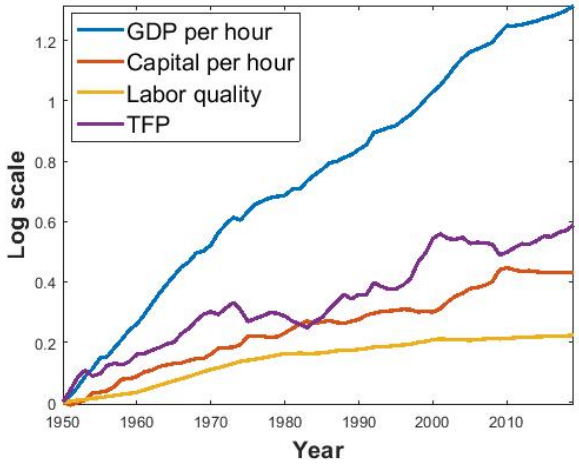
La intuición es muy simple. La producción por trabajador crece porque el capital por trabajador está creciendo (profundización del capital), la calidad de la fuerza laboral está creciendo o la tecnología está creciendo.

Crecimiento de la producción en Estados Unidos



- Acumulación de capital es la contribución número uno para el crecimiento de la producción en Estados Unidos.
- Una fuerza laboral mejor educada es relativamente poco importante.
- La desaceleración del crecimiento desde 1970 se debe principalmente al bajo crecimiento de la PTF. Observamos algunas ganancias desde 2010.

Crecimiento de la producción por hora en EE.UU.



También cuantitativamente, el modelo hace un buen trabajo. Como la educación ya no es constante, deberíamos tener $g_k > g$. Este es el caso (cambios en puntos logaritmo 1.07 vs. 0.99).

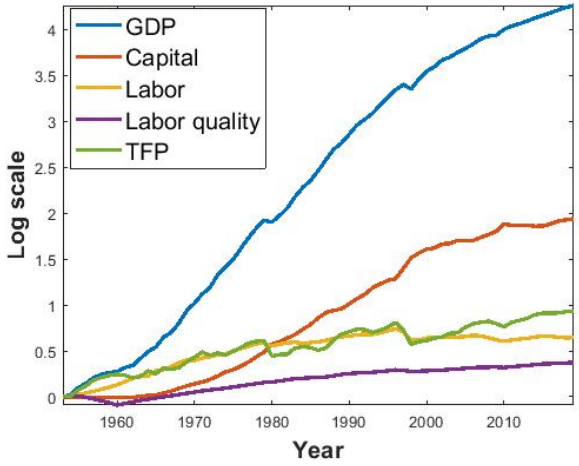
Convergencia al estado estacionario

Convergencia al estado estacionario

El modelo de Solow también hace predicciones sobre el crecimiento de la producción en países que convergen a su nuevo estado estacionario:

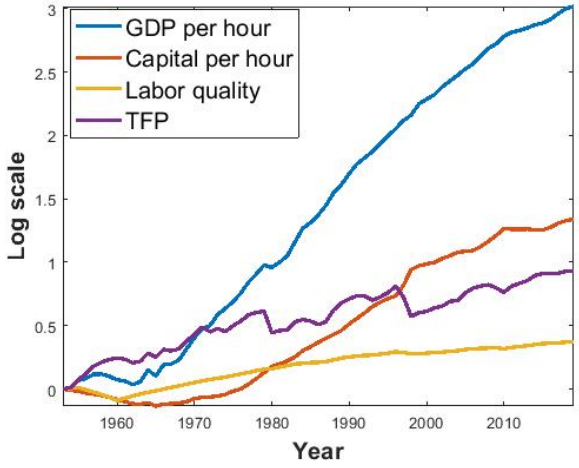
- Los países que crecen rápidamente deberían hacerlo temporalmente debido a la rápida acumulación de capital.
- Los países que crecen negativamente deberían hacerlo temporalmente debido a la rápida desacumulación de capital.
- Los cambios porcentuales en la relación capital-producción deberían ser mayores al comienzo de la transición.

Un milagro para el crecimiento: crecimiento de la producción en Corea



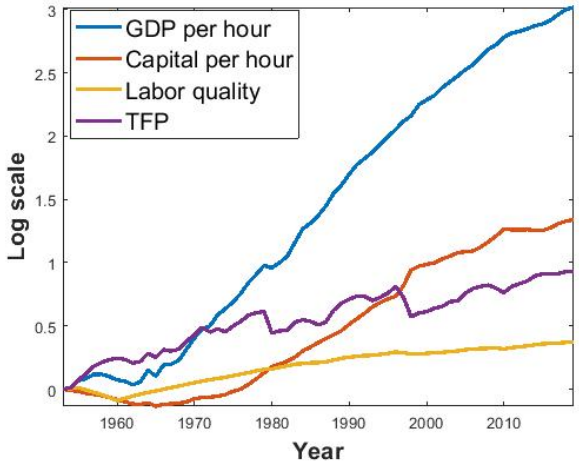
- Corea creció mucho más rápido que Estados Unidos (escala logarítmica 4.3 vs. 2.1).
- Como predijo el modelo de Solow, lo que destaca es el crecimiento relativamente rápido del capital (escala logarítmica 4 vs. 1.9).

Crecimiento de la producción por hora en Corea



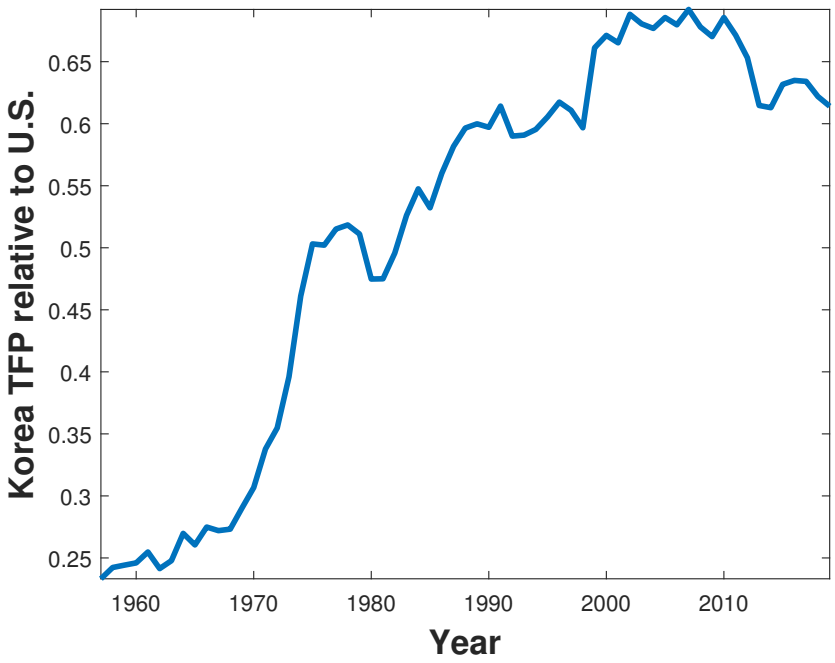
Una vez más, de acuerdo con el modelo de Solow, tenemos $g_k > g$. De hecho, de acuerdo con la idea de que Corea comenzó por debajo de su estado estacionario en 1953, tenemos $g_k >> g$ (escala logarítmica 2.8 vs. 1.8). El resultado es aún más crudo cuando se toma 1965 como punto de partida. También consistente con el modelo de Solow, g_y y g_k están cayendo con el tiempo.

Crecimiento de la producción por hora en Corea II



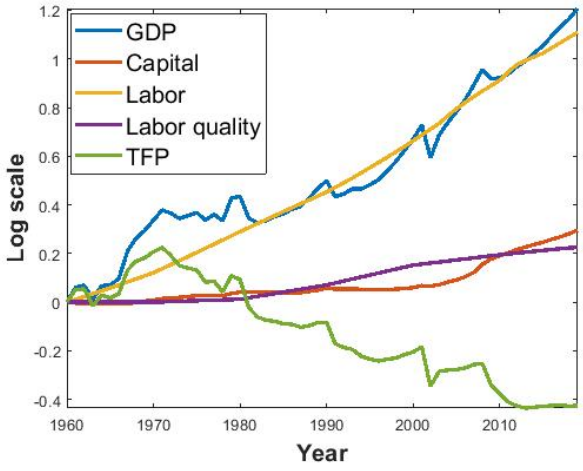
El crecimiento de la educación fue más rápido en Corea que en Estados Unidos. Por lo tanto, parte de la rápida acumulación de capital puede deberse a la acumulación de capital humano.

Crecimiento de la PTF en Corea



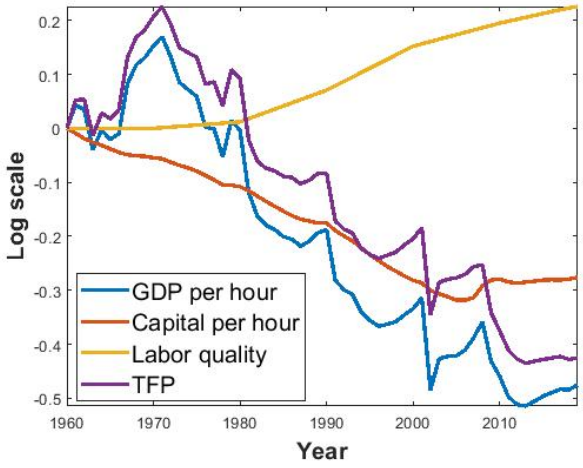
Sin embargo, también destaca una fuerte recuperación de la PTF que el modelo de Solow no puede explicar.

Un desastre de crecimiento: crecimiento de la producción en Madagascar



- Madagascar era uno de los países más pobres en 1960. A pesar de eso, casi todo el crecimiento de la producción se debe al crecimiento de la mano de obra.
- El crecimiento del capital es lento.
- El crecimiento de la PTF ha sido negativo desde 1970.

Crecimiento de la producción por hora en Madagascar



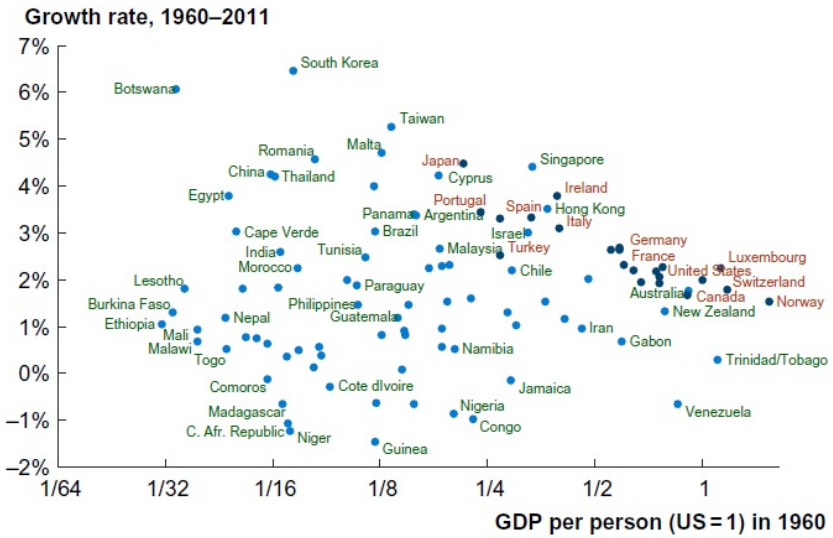
- Una tasa de crecimiento constante (positiva) de la PTF es una suposición pobre para Madagascar.
- De hecho, la *disminución* de la PTF es clave para comprender la disminución de la producción por hora.

¿Observamos convergencia en los niveles de vida?

¿El mundo se vuelve más igualitario?

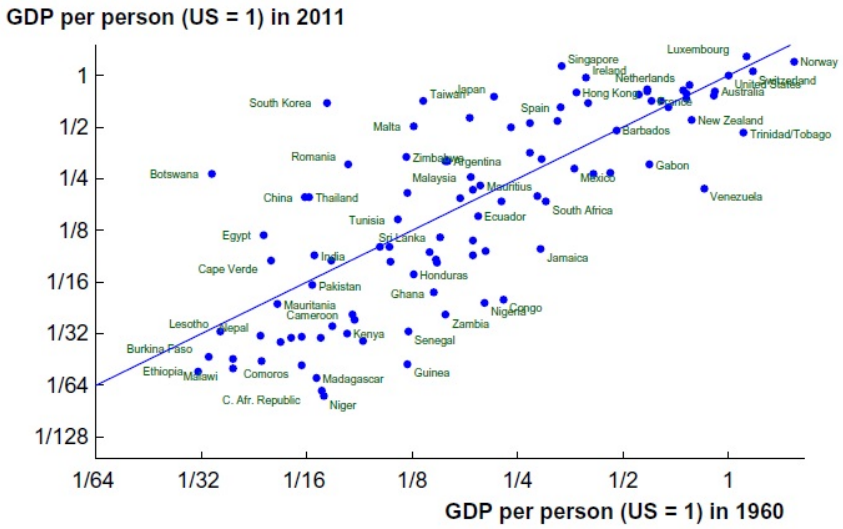
- Hemos visto que en cualquier momento, los países varían enormemente en su ingreso per cápita.
- Tal vez nos interese la cuestión de si los países convergen en sus niveles de vida a lo largo del tiempo.
- Para la convergencia, necesitamos que los países que son relativamente pobres crezcan relativamente rápido.

Convergencia entre países



Al observar el mundo en su conjunto, no observamos una convergencia general entre los países. No es cierto que los países que eran pobres en 1960 crecieran en promedio más rápido que los países que eran ricos en 1960. Sin embargo, vale la pena recordar que la imagen se vería diferente cuando se observan las medidas ponderadas por la población.

Convergencia entre países II



Como resultado, los países que eran relativamente ricos en 1960 tienden a ser también relativamente ricos en 2011.

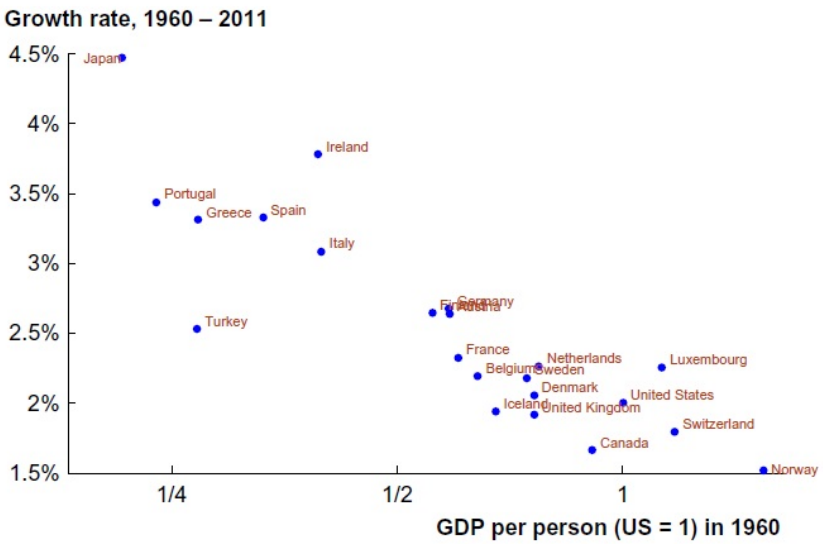
¿Es esto inconsistente con el modelo de Solow?

El mundo en su conjunto cada vez más igualitario se conoce como *convergencia absoluta*.

Es importante reconocer que el modelo de Solow no predice la convergencia absoluta. En cambio, predice la *convergencia condicional*. Dos países con el mismo estado estacionario deberían converger con el tiempo en el PIB per cápita.

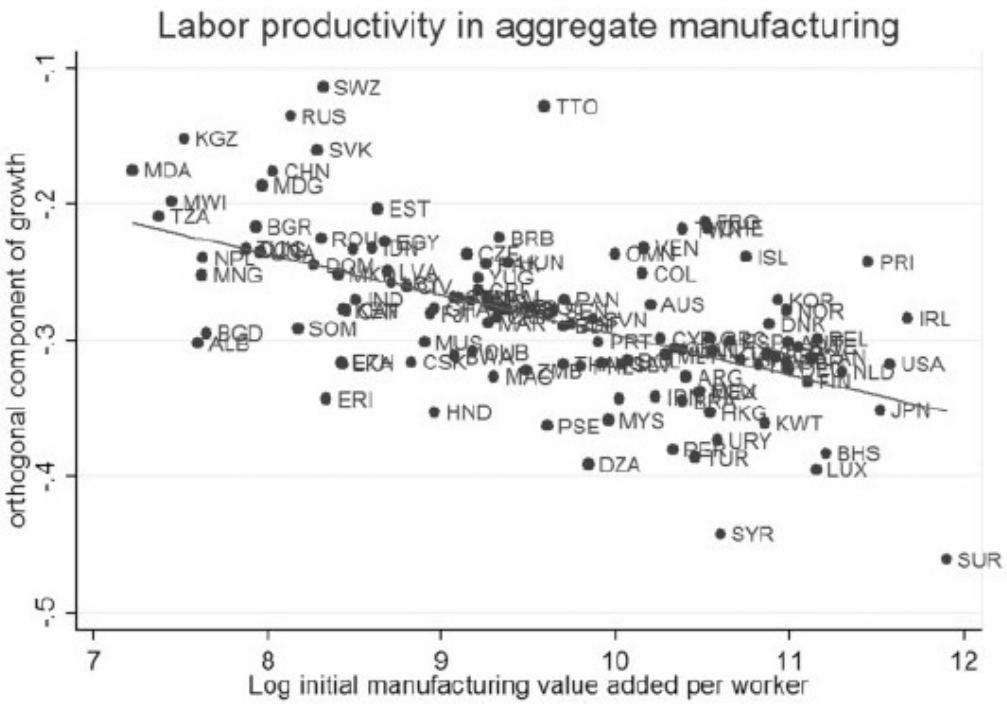
Como hemos visto, los países no tienen todos el mismo estado estacionario. Difieren en sus tasas de ahorro, tasas de crecimiento de la población, educación, tasas de crecimiento de la tecnología y niveles de tecnología.

¿Existe convergencia condicional?



Los países que forman la OCDE tienen estructuras socioeconómicas relativamente similares y, por lo tanto, se puede pensar que tienen estados estacionarios similares. Baumol (1986) el primero en demostrar que condicionando a este grupo de países, de hecho observamos convergencia en los niveles de vida.

Convergencia absoluta en la manufactura



Source: Rodrik (2013)

La manufactura muestra una convergencia absoluta. Una posible explicación es que el sector está globalizado con empresas multinacionales que llevan su tecnología a diferentes países.

Observaciones finales: lo bueno

- Las diferencias en la relación capital-producción explican algunas diferencias en el ingreso per cápita, particularmente entre los países ricos.
- Estas diferencias están vinculadas a las tasas de crecimiento demográfico y a las diferencias en las tasas de ahorro.
- El modelo explica bien el crecimiento en estado estacionario.
- Los milagros del crecimiento muestran una rápida acumulación de capital.
- Hay cierta evidencia de convergencia condicional.

Observaciones finales: lo malo

Al final, necesitamos una teoría de la PTF:

- La explicación número uno de las diferencias de ingresos entre países son las diferencias en la PTF.
- Los milagros del crecimiento se deben en gran medida al rápido crecimiento de la PTF.

Referencias

Baumol, W. J. (1986): "Productivity growth, convergence, and welfare: what the long-run data show," *The american economic review*, 1072–1085.

Mankiw, N. G., D. Romer, and D. N. Weil (1992): "A contribution to the empirics of economic growth," *The quarterly journal of economics*, 107, 407–437.

Rodrik, D. (2013): "Unconditional convergence in manufacturing," *The quarterly journal of economics*, 128, 165–204.

Solow, R. M. (1957): "Technical change and the aggregate production function," *The review of Economics and Statistics*, 312–320.