Solución Examen de Introducción a la Econometría

Universidad Carlos III de Madrid

1^a Convocatoria

Curso 2005/2006

Conteste las preguntas siguientes en cuadernillos separados en 2 horas y media

1. **[2 puntos]** Sean tres variables aleatorias discretas U, X e Y tales que $Y = X + U$. El siguiente cuadro describe la función de masa de probabilidad conjunta de X y U:

	$U=-7$	$U=3$
$X=5$	$0,2$	$0,3$
$X=15$	$0,1$	$0,4$

a. **[0,75 puntos]** Obtenga los siguientes momentos poblacionales: $E(X)$, $E(U)$, $Cov(X,U)$, $Var(X)$, $Var(U)$, $E(Y)$, $Var(Y)$ y $Cov(X,Y)$.

b. **[0,75 puntos]** Calcule el predictor lineal óptimo de la variable Y dado X. Es decir, calcule el valor de los parámetros a y b del $PLO(Y|X) = a + bX$ y ofrezca el valor predicho para Y en función del valor de X según esta formula. Demuestre que el predictor óptimo es lineal, es decir, $E(Y|X) = PLO(Y|X)$.

c. **[0,5 puntos]** Calcule $E(X|Y)$.

SOLUCIÓN: a.

	$U=-7$	$U=3$	
$X=5$	$0,2$	$0,3$	$0,5$
$X=15$	$0,1$	$0,4$	$0,5$
	$0,3$	$0,7$	1

$$\begin{aligned}
E(X) &= 5*0,5+15*0,3 = 10 \\
E(U) &= -7*0,3+3*0,7 = 0 \\
E(XU) &= 5*(-7)*0,2+5*3*0,3+15*(-7)*0,1+15*3*0,4 \\
&= 5 \\
Cov(X,U) &= E(XU) - E(X)E(U) = E(XU) = 5 \\
E(X^2) &= 5^2*0,5+15^2*0,5 = 125 \\
Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 125 - 10^2 = 25 \\
E(U^2) &= (-7)^2*0,3+3^2*0,7 = 21 \\
Var(U) &= E(U^2) - E(U)^2 = E(U^2) = 21 \\
E(Y) &= E(X) + E(U) = 10 + 0 = 10 \\
Var(Y) &= Var(X) + Var(U) + 2*Cov(X,U) \\
&= 25 + 21 + 2*5 = 56 \\
Cov(X,Y) &= V(X) + Cov(X,U) = 25 + 5 = 30,
\end{aligned}$$

b. Por tanto

$$\begin{aligned}
b &= \frac{C(X,Y)}{V(X)} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1,2 \\
a &= E(Y) - bE(X) = 10 - \frac{6}{5}*10 = -2,
\end{aligned}$$

$PLO(Y|X=x) = -2 + 1,2x$,

	$PLO(Y\|X=x)$
$X=5$	$-2+1,2*5=4$
$X=15$	$-2+1,2*15=16$

u	$\Pr(U=u\|X=5)$	$\Pr(U=u\|X=15)$
-7	$0,4$	$0,2$
3	$0,6$	$0,8$
	1	1

$$
\begin{aligned}
E\left(U|X=5\right) &= (-7)*0,4+3*0,6=-1 \\
E\left(U|X=15\right) &= (-7)*0,2+3*0,8=1
\end{aligned}
$$

Ahora se tiene que $E\left[Y|X=x\right]=x+E\left[U|X=x\right]$,

$$
\begin{aligned}
E\left(Y|X=5\right) &= 5-1=4 \\
E\left(Y|X=15\right) &= 15+1=16,
\end{aligned}
$$

que coincide con el PLO.

c. Los valores de Y son tres: -2 (cuando $\{U=-7,X=5\}$, con probabilidad $0,2$); 8 (cuando $\{U=-7,X=15\}$ y $\{U=3,X=15\}$, con probabilidades 0.3 y $0,1$ respectivamente); 18 $\{U=3,X=15\}$, con probabilidad $0,4$:

	$Y=-2$	$Y=8$	$Y=18$	
$X=5$	$0,2$	$0,3$	0	$0,5$
$X=15$	0	$0,1$	$0,4$	$0,5$
	$0,2$	$0,4$	$0,4$	1

y	$\Pr(Y=y\|X=5)$	$\Pr(Y=y\|X=15)$
-2	$0,4$	$0,2$
8	$0,6$	$0,8$
15	0	0
	1	1

x	$\Pr(X=x\|Y=-2)$	$\Pr(X=x\|Y=8)$	$\Pr(X=x\|Y=18)$
5	1	$0,75$	0
15	0	0,25	1
	1	1	1

$$
\begin{aligned}
E\left(X|Y=-2\right) &= 5 \\
E\left(X|Y=\ \ 8\right) &= 0,75*5+0,25*15=7,5. \\
E\left(X|Y=15\right) &= 15.
\end{aligned}
$$

2. [3 puntos] Considere el modelo lineal

$$\log(price)=\delta_0+\delta_1 age+u$$

donde *price* es el precio de las casas en un determinado municipio y *age* es la edad de la casa (en años). Se dispone de una muestra de 321 viviendas y se estima la ecuación por MCO.

a. [1 punto] Si el intervalo de confianza al 95% para el parámetro δ_1 se sitúa en $(-0,0067524;-0,0040476)$, ¿cuál sería la estimación resultante del parámetro δ_1? ¿Cuál es la interpretación de la estimación de este coeficiente? ¿Es la variable *age* significativa al 5%? ¿Y al 1%?

b. [0,5 puntos] Si la desviación típica muestral de la de la variable *age* es igual a $32,51507343$, ¿cuál es la covarianza muestral entre las variables *log*(*price*) y *age*?

c. [1 punto] El R^2 de la anterior estimación es de $0,161051$ La teoría económica indica que la variable *rooms* (número de habitaciones de la vivienda) también debería incluirse como variable explicativa en la ecuación. Si se estima una nueva ecuación donde se incluye esta variable explicativa (además de age) y su R^2 es igual a $0,385150$, ¿se puede rechazar la hipótesis nula de que la variable *rooms* es no significativa?

d. [0,5 puntos] Si realizamos el ajuste de la variable *rooms* sobre la variable *age* obtenemos el siguiente resultado:

Dependent Variable: ROOMS
Method: Least Squares
Sample: 1 321
Included observations: 321

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AGE	-0.001417			
C	6.611182			

F-statistic	0.838128
Prob(F-statistic)	0.360624

¿Se puede rechazar la hipótesis de que la estimación de la pendiente de la variable *age* es la misma en el modelo de regresión "corto" que en el "largo"?

SOLUCIÓN: a.

$$\begin{aligned} \widehat{\delta_1} - 1,96 * se(\widehat{\delta_1}) &= -0,0067524 \\ \widehat{\delta_1} + 1,96 * se(\widehat{\delta_1}) &= -0,0040476 \end{aligned}$$

De estas dos ecuaciones con dos incógnitas se desprende que $\widehat{\delta_1} = -0,0054$ y $se(\widehat{\delta_1}) = 0,00069$. La interpretación es que cuando la edad de la casa aumenta en 1 año, el precio disminuye en promedio un $0,54\%$. Para ver la significatividad utilizamos la $t-ratio$:

$$t = \frac{-0,0054}{0,00069} = -7,825448.$$

Por lo tanto, es significativa tanto al 5% como al 1%.

b.

$$\widehat{Cov_n}(age, \log(price)) = \widehat{\delta_1} * \widehat{Var_n}(age) = -0,0054 * (32,51507343)^2 = -5,709042$$

c.

$$F = \frac{R^2_{SR} - R^2_R}{1 - R^2_{SR}} * \frac{n}{q} = \frac{0,385150 - 0,161051}{1 - 0,385150} * \frac{321}{1} = 115,091 \ggg \text{valor crítico}$$

Por tanto, la variable *rooms* es significativa

d.

$$rooms = \gamma_0 + \gamma_1 age + V$$

$$\delta_1 = \beta_1 + \beta_2\gamma_1$$

Dado que en el apartado anterior hemos rechazado que

$$H_0 : \beta_2 = 0$$

quedaría por comprobar que:

$$H_0 : \gamma_1 = 0$$

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} * \frac{n}{q} = 0,838128$$

que nos viene dado en el enunciado así como el $p-valor$ del contraste que es $0,360624$. Por tanto, no rechazamos la hipótesis nula

3. [**3 puntos**] Las empresas pueden financiarse mediante la emisión de acciones (fondos propios) o mediante la emisión de bonos (deuda). Una teoría económica afirma que la ratio de deuda sobre fondos propios, $100 * Deuda/(Fondos\quad Propios)$, dependerá de los tipos impositivos que afronte la empresa. En concreto,

- las empresas preferirán utilizar el endeudamiento cuanto mayores sean los impuestos sobre los beneficios de las empresas, *ceteris paribus*
- cuantos mayores sean los impuestos sobre las ganancias de capital (*ceteris paribus*), mayor será el endeudamiento de las empresas
- cuantos mayores sean los impuestos de la renta (*ceteris paribus*), menor será el endeudamiento de las empresas

Usted de dispone de datos para 51 estados americanos con información sobre los tipos impositivos de los impuestos sobre el beneficio empresarial, $tprof$, sobre las ganancias de capital, $tcap$, y sobre la renta, $tinc$; además, se conoce la ratio (media) de deuda sobre fondos propios de las empresas ubicadas en cada estado, $debrat$. Todas las variables están medidas en puntos porcentuales. Con la muestra, disponible se han estimado por Mínimos Cuadrados Ordinarios los siguientes modelos:

$$\widehat{debrat}_i = \underset{(9,8700)}{69,3662} \underset{(1,0607)}{+1,6223}\ tprof_i \underset{(0,7028)}{-1,1214}\ tinc_i \underset{(1,3427)}{+1,0777}\ tcap_i \qquad (1)$$
$$n = 51 \quad R^2 = 0,350553 \quad SSR = 7328,5176$$

$$(\widehat{debrat_i - tcap_i}) = \underset{(4,8050)}{81,7726} \underset{(0,9749)}{+0,9886}\ (tprof_i - tcap_i) \underset{(0,4201)}{-0,3085}\ (tinc_i - tcap_i) \qquad (2)$$
$$n = 51 \quad R^2 = 0,063316 \quad SSR = 7649,2574$$

$$\widehat{debrat}_i = \underset{(9,6765)}{69,4269} \underset{(0,3989)}{+1,5778}\ tprof_i \underset{(0,6680)}{-1,1302}\ (tinc_i - tcap_i) \qquad (3)$$
$$n = 51 \quad R^2 = 0,350524 \quad SSR = 7328,8376$$

$$\widehat{debrat}_i = \underset{(9,8700)}{69,3662} \underset{(1,0607)}{+1,6223}\ tprof_i \underset{(0,7028)}{-1,1214}\ (tinc_i - tcap_i) \underset{(0,9651)}{-0,0437}\ tcap_i \qquad (4)$$
$$n = 51 \quad R^2 = 0,350553 \quad SSR = 7328,5176$$

a. [**1 punto**] Fíjese en los resultados del Modelo (1). Si no existieran impuestos, ¿tendrían las empresas en promedio más Deuda que Fondos Propios? ¿Cúal sería su respuesta si un estado fija un tipo impositivo de 15 puntos porcentuales para las ganancias de capital, de 20 puntos porcentuales en el impuesto sobre la renta y de 30 puntos porcentuales en el impuesto sobre los beneficios empresariales?

b. [**0,75 puntos**] Contraste con un nivel de significación del 1% la hipótesis de que conjuntamente las cuestiones fiscales son relevantes en las decisiones de endeudamiento de las empresas. ¿Sería la conclusión diferente si hubiera hecho tres constrastes de significatividad individual con el mismo nivel de significación cada uno? ¿Por qué?

c. [**0,75 puntos**] Contraste, con un nivel de significación del 1%, la hipótesis de que un aumento simultáneo de todos los impuestos en un punto porcentual provocará un aumento de un punto en la ratio de deuda sobre fondos propios. Ofrezca el valor tanto del estadístico F como el del estadístico t que se pueden utilizar para realizar este contraste.

d. [0,5 puntos] Para los resultados del Modelo (1), se conoce que la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores de MCO son

$$Var\begin{pmatrix}\widehat{\beta}_{tprof}\\ \widehat{\beta}_{tinc}\\ \widehat{\beta}_{tcap}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,1251014 & -0,0399419 & -0,9069212\\ -0,0399419 & 0,4939748 & -0,6826735\\ -0,9069212 & -0,6826735 & 1,802722\end{pmatrix}$$

Un gobierno anuncia una reforma fiscal consistente en reducir el impuesto de la renta en 5 puntos porcentuales y aumentar el impuesto sobre ganancias de capital en 10 puntos (manteniendo constante el impuesto sobre los beneficios). Ofrezca un intervalo de confianza al 90% para el cambio esperado, en promedio, en la ratio de deuda sobre fondos propios. ¿Considera probable, con un nivel de confianza del 90%, que esta política provoque una caída de 10 puntos en la ratio de deuda sobre fondos públicos?

SOLUCIÓN: a. Si no existieran impuestos, $tprof_i = tinc_i = tcap_i = 0$, la ratio de deuda sobre fondos propios estimado sería, en promedio, $\widehat{debrat_i} = 69,3662$; puesto que es menor que 100, habría más fondos propios que deuda. Por otro lado, con los tipos impositivos del enunciado, la ratio estimada sería de $\widehat{debrat_i} = 69,3662 + 1,6223 * 30 - 1,1214 * 20 + 1,0777 * 15 = 111,17$; es decir, habría más deuda que fondos propios.

b. En el modelo $debrat_i = \beta_0 + \beta_1\, tprof_i + \beta_2\, tinc_i + \beta_3\, tcap_i + \varepsilon_i$, la hipótesis de que conjuntamente los impuestos no son relevantes y el correspondiente estadístico de contraste son:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : H_0 \text{ no es cierta}$$

$$W = qF = \frac{R^2}{(1-R^2)/n} \underset{H_0}{\overset{a}{\sim}} \chi^2_{(q)}$$

En este caso, $q = 3$ y sólo necesitamos el R^2 del modelo sin restringir porque para el modelo restringido es cero. Como $W = qF = \frac{0,350553}{(1-0,350553)/51} = 27,528$ y el valor crítico de una $\chi^2_{(3)}$ al 1% es $c^*_{0,01} = 11,37$, se rechaza la hipótesis nula al 1% ($W > c^*_{0,01}$). Para los contrastes de significatividad individual de cada parámetro se tendrían los siguientes valores de los estadísticos

$$t_{\widehat{\beta}_1} = \frac{1,6223}{1,0607} = 1,5294$$
$$t_{\widehat{\beta}_2} = \frac{-1,1214}{0,7028} = -1,5955$$
$$t_{\widehat{\beta}_3} = \frac{1,0777}{1,3427} = 0,8026$$

Comparándolos con el valor crítico de la distribución normal $N(0,1)$ al 1% para una alternativa bilateral: $c^*_{\frac{0,01}{2}} = 2,576$, resulta claro que en todos los casos $|t| < 2,576$; por tanto, no se puede rechazar individualmente que los coeficientes sean cero. Esta diferencia entre el resultado del contraste individual y conjunto sería un indicio de multicolinealidad: los estados con un tipo impositivo alto en la renta también suelen tener altos los tipos del resto de impuestos.

c. Puesto que $\Delta debrat_i = \beta_1 \Delta\, tprof_i + \beta_2\, \Delta tinc_i + \beta_3\, \Delta tcap_i$, si todos los impuestos suben en un punto ($\Delta\, tprof_i = \Delta tinc_i = \Delta tcap_i = 1$) el aumento de la ratio será $\Delta debrat_i = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ que según el enunciado debe ser igual a uno

$$H_0 : \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \neq 1$$

Imponemos la restricción (por ejemplo, $\beta_3 = 1 - \beta_1 - \beta_2$), se tiene un modelo restringido como el (2). El estadístico de contraste es $W = qF = \frac{SSR_R - SSR_{SR}}{(SSR_{SR})/n} \underset{H_0}{\overset{a}{\sim}} \chi^2_{(q)}$. En este caso $q = 1$ y el estadístico tiene valor

$$W = F = \frac{7649,2574 - 7328,5176}{7328,5176/51} = 2,232\,1$$

El valor crítico de una $\chi^2_{(1)}$ al 1% es $c^*_{0,01} = 6,63$. Puesto que $W < c^*_{0,01}$ no evidencia empírica para rechazar la hipótesis nula al 1%. El valor del estadístico t se obtiene sin más cálculos usando que $t^2 = F$; por tanto, $t = \sqrt{2,232\,1} = 1,494$.

d. Sabemos que $\Delta debrat_i = \beta_1 \Delta\, tprof_i + \beta_2\, \Delta tinc_i + \beta_3\, \Delta tcap_i$ y que el gobierno se propone $\Delta tinc_i = -5$ y $\Delta tcap_i = 10$ ($\Delta\, tprof_i = 0$); luego $\Delta debrat_i = -5\beta_2 + 10\beta_3$. Por tanto, un intervalo de confianza para el cambio en la ratio es un intervalo de confianza para el parámetro $\theta = -5\beta_2 + 10\beta_3$, es decir, el parámetro construido como combinación lineal de los coeficiente β_2 y β_3. El intervalo de confianza al 90% será

$$\left(\widehat{\theta} - c^*_{\frac{0,10}{2}} * se\left(\widehat{\theta}\right), \widehat{\theta} + c^*_{\frac{0,10}{2}} * se\left(\widehat{\theta}\right)\right)$$

donde $\widehat{\theta} = (-5) * (-1,1214\,) + 10 * 1,0777 = 16,384$, $c^*_{\frac{0,10}{2}} = 1,645$ y

$$se\left(\widehat{\theta}\right) = \sqrt{\widehat{V}_n\left(\widehat{\theta}\right)} = \sqrt{(-5)^2\, \widehat{V}_n\left(\widehat{\beta}_2\right) + (10)^2\, \widehat{V}_n\left(\widehat{\beta}_3\right) + 2\,(-5)\,(10)\, \widehat{C}_n\left(\widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3\right)}$$
$$= \sqrt{25 * 0,4939748 + 100 * 1,802722 + 100 * 0,6826735} = \sqrt{260,89} = 16,152$$

Por tanto, el intervalo será $(-10,186; 42,954)$. Puesto que el intervalo de confianza al 90% incluye el -10, es probable (con un nivel de confianza del 90%) que la ratio caiga 10 puntos.

4. [2 puntos] La Oficina de Estadísticas Laborales de Estados Unidos realiza todos los años una encuesta para estudiar la situación del mercado de trabajo norteamericano. Entre las variables que se pueden construir a partir de la encuesta se encuentran el logaritmo neperiano del salario nominal a la hora (*lwage*), los años efectivos de educación universitaria (en exceso de 16.5 años) (*educa*), y una variable artificial (dummy) que toma valor 1 si el encuestado es mujer ($female$) y 0 en caso contrario. Se disponen de datos para el año 2000 para trabajadores con experiencia laboral menor de un año y estudios universitarios (al menos $16,5$ años de educación). Entre estos trabajadores, la variable *educa* solo toma tres valores: 0, $1,5$ y $3,5$. Además, se genera una nueva variable interactuando *educa* y $female$, $edufem = educa * female$.
Con los datos disponibles se realizan las siguientes regresiones MCO (errores estándar en paréntesis):

Regresión 1:

$$\widehat{lwage} = \underset{(,041913)}{2,676852} + \underset{(,0206192)}{0,1310272}educa$$
$$n = 501; \quad RSS = 97,342215946$$

Regresión 2:

$$\widehat{lwage} = \underset{(,0287494)}{2,73752} + \underset{(.0590482)}{0,1874562}educa - \underset{(,080746)}{0,1217951}female - \underset{(,0828375)}{0,1090569}edufem$$
$$n = 501; \quad RSS = 94,649281968$$

a. [0,75 puntos] Interprete el valor del coeficiente de *educa* en la regresión 1. Calcule el diferencial salarial medio exacto, en tantos por ciento, entre los trabajadores con estudios superiores universitarios de postgrado (es decir, con 20 años de educación) y los trabajadores con una titulación de tres años (es decir, con 16.5 años de educación).

b. [0,75 puntos] Interprete el valor del coeficiente de $edufem$ en la regresión 2. ¿Son las diferencias por sexo en los rendimientos a la educación significativas? Justifique su respuesta.

c. [0,5 puntos] Indique detalladamente cómo contrastaría que los rendimientos a la educación superior de las mujeres no son lineales respecto a los años en educación superior.

SOLUCIÓN: a. El coeficiente estimado indica que si los años efectivos de educación aumenta en una unidad, el salario medio va a aumentar en un $13,10272\%$ aproximadamente, ceteris paribus.

Diferencial salarial medio exacto:

$$\frac{\widehat{wage}_{post} - \widehat{wage}_{3años}}{\widehat{wage}_{3años}} * 100\%.$$

Para ello tenemos

$$\widehat{lwage}_{post} - \widehat{lwage}_{3años} = (3,5 - 0) * 0,1310272 = 0,458\,60$$

por lo que tomando antilogaritmos,

$$\exp\left(\widehat{lwage}_{post} - \widehat{lwage}_{3años}\right) = \frac{\widehat{wage}_{post}}{\widehat{wage}_{3años}} = \exp(0,458\,60)$$

y finalmente

$$\frac{\widehat{wage}_{post} - \widehat{wage}_{3años}}{\widehat{wage}_{3años}} * 100\% = \{\exp(0,458\,60) - 1\} * 100\% = 58,186\%$$

es decir, los trabajadores con el postgrado ganaran un $58,18\%$ más en promedio, que comparado con el valor aproximado, $(20 - 16,5) * 0,1310272 * 100\% = 0,458\,60 * 100\% = 45,86\%$, es bastante superior.

b. El coeficiente indica que las mujeres obtienen como retorno medio por un año extra de educación un $10,90569\%$ menos de salario, aproximadamente, en comparación con el incremento que obtienen los hombres (un 18.74%), ceteris paribus.

La hipótesis nula a contrastar sería

$$H_0 : \beta_3 = 0$$

en contra de

$$H_1 : \beta_3 \neq 0$$

en el modelo

$$lwage = \beta_0 + \beta_1 educa + \beta_2 female + \beta_3 edufem + u,$$

Para ello calculamos

$$t = \frac{\hat{\beta}_3}{s.e.\left(\hat{\beta}_3\right)} = \frac{-0,1090569}{0,0828375} = -1,316\,5,$$

que no es significativo al 10%, comparado con el valor crítico de la $N(0,1)$, $c^*_{0,10/2} = 1,645$ (aunque lo sería si la alternativa fuese $\beta_3 < 0$, es decir, si hay discriminación salarial en contra de las mujeres).

c. El modelo Regresión 2, siendo el más general de los que se proponen, supone que los rendimientos a la educación superior de las mujeres son lineales respecto a los años en educación superior:

Modelo 2:

$$E[lwage|female, educa] = (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3) * educa$$

Ese supuesto se puede constrastar si planteamos un modelo con variables dummies para cada nivel de educación interaccionadas con $female$. Definamos:

$$ed2fem = \begin{cases} 1 \text{ si } female = 1 \text{ y } educa = 1,5 \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

$$ed3fem = \begin{cases} 1 \text{ si } female = 1 \text{ y } educa = 3,5 \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces en el modelo:

Modelo 3:

$$lwage = \alpha_0 + \alpha_1 educa + \gamma_0 female + \gamma_1 ed2fem + \gamma_2 ed3fem + \varepsilon$$

Tenemos que los rendimientos esperados a la educación femeninos pueden ser no-lineales mientras que los masculinos siguen siendo lineales:

$$\begin{aligned}
E[lwage|female, educa &= 0] = (\alpha_0 + \gamma_0) \\
E[lwage|female, educa &= 1,5] = (\alpha_0 + \gamma_0) + (1.5\alpha_1 + \gamma_1) \\
E[lwage|female, educa &= 3,5] = (\alpha_0 + \gamma_0) + (3.5\alpha_1 + \gamma_2) \\
E[lwage|male] &= \alpha_0 + \alpha_1 educa
\end{aligned}$$

Para que los rendimientos femeninos fuesen lineales, como en el **Modelo 2**, los parámetros del **Modelo 3** deberían satisfacer las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
(\alpha_0 + \gamma_0) &= (\beta_0 + \beta_2) \\
(\alpha_0 + \gamma_0) + (1.5\alpha_1 + \gamma_1) &= (\beta_0 + \beta_2) + 1.5 * (\beta_1 + \beta_3) \\
(\alpha_0 + \gamma_0) + (3.5\alpha_1 + \gamma_2) &= (\beta_0 + \beta_2) + 3.5 * (\beta_1 + \beta_3)
\end{aligned}$$

Sustituyendo la primera restricción en las dos restantes y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}
(1.5\alpha_1 + \gamma_1) &= 1.5 * (\beta_1 + \beta_3) \\
(3.5\alpha_1 + \gamma_2) &= 3.5 * (\beta_1 + \beta_3)
\end{aligned}$$

Dividiendo la tercera por la segunda y simplificando deducimos que la hipótesis nula a contrastar es $H_0 : \gamma_2 = (3,5/1,5)\gamma_1$ frente a la alternativa $H_1 : \gamma_2 \neq (3,5/1,5)\gamma_1$.
Una forma de ejecutar este contraste es estimando **Modelo 3** como el no restringido y **Modelo 2** como el restringido y computando el estadístico F.
Otra alternativa sería introducir términos no lineales en $edufem$ (cuadrados, etc) y hacer el contraste de significación de tales términos.

VALORES CRÍTICOS:

$N(0,1)$
$\Pr(N(0,1) > 2,576) = 0,005$
$\Pr(N(0,1) > 2,326) = 0,01$
$\Pr(N(0,1) > 1,960) = 0,025$
$\Pr(N(0,1) > 1,645) = 0,05$
$\Pr(N(0,1) > 1,282) = 0,10$

$\chi^2_{(1)}$	$\chi^2_{(2)}$	$\chi^2_{(3)}$
$\Pr\left(\chi^2_{(1)} > 6,63\right) = 0,01$	$\Pr\left(\chi^2_{(2)} > 9,21\right) = 0,01$	$\Pr\left(\chi^2_{(3)} > 11,34\right) = 0,01$
$\Pr\left(\chi^2_{(1)} > 3,84\right) = 0,05$	$\Pr\left(\chi^2_{(2)} > 5,99\right) = 0,05$	$\Pr\left(\chi^2_{(3)} > 7,81\right) = 0,05$
$\Pr\left(\chi^2_{(1)} > 2,71\right) = 0,10$	$\Pr\left(\chi^2_{(2)} > 4,61\right) = 0,10$	$\Pr\left(\chi^2_{(3)} > 6,25\right) = 0,10$

Recordamos que una t de Student con n grados de libertad se comporta como un $N(0,1)$ para n razonablemente grande ($n > 30$). Por otro lado, una F de $Fisher$ con q grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador se comporta como una $\chi^2_{(q)}/q$.