Examen de Introducción a la Econometría
Universidad Carlos III de Madrid
1ª Convocatoria
Curso 2004/2005

Nota Informativa: Las notas estarán disponibles via web el 4 de julio a las 12:00 am. En las actas se informará sobre la fecha y aulas de revisión de examen.

Conteste las preguntas siguientes en 2 horas y media

1. Sea (Y, X, Z) una variable aleatoria y considere los modelos de regresión:

$$\begin{aligned}E(Y|X=x) &= 1 + 3x \\E(Y|Z=z) &= 2 + 4z.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $E(X) = 3$, $E(Z) = 2$, $Var(X) = Var(Z) = 1$ y $Cov(X, Z) = 5$, donde E , Var y Cov denotan esperanza, varianza y covarianza, respectivamente:

a. (0,5 puntos) ¿Cuál es el valor de $E(Y)$, de $Cov(Y, X)$ y de $Cov(Y, Z)$?

b. (1,5 puntos) Considere el modelo

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 Z + \varepsilon,$$

donde los β 's son parámetros y $E(\varepsilon) = Cov(\varepsilon, X) = Cov(\varepsilon, Z) = 0$. Calcule los valores numéricos de β_1 y β_2 .

SOLUCIÓN:

a.

$$\begin{aligned}E(Y) &= 1 + 3E(X) = 1 + 3 \times 3 = 10 \\&= 2 + 4E(Z) = 2 + 4 \times 2 = 10\end{aligned}$$

$$Cov(Y, X) = 3 \times Var(X) = 3$$

$$Cov(Y, Z) = 4 \times Var(Z) = 4.$$

b.

$$\begin{aligned}3 &= \beta_1 + \beta_2 \frac{Cov(X, Z)}{Var(X)} = \beta_1 + 5\beta_2 \\4 &= \beta_2 + \beta_1 \frac{Cov(X, Z)}{Var(Z)} = \beta_2 + 5\beta_1.\end{aligned}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, y obtenemos que $\beta_2 = 17/24$ y $\beta_1 = 11/24$.

2. Considere una variable aleatoria bivalente (Y, X) tal que

$$Y = 2X + \varepsilon,$$

donde ε es un error tal que

$$E(\varepsilon|X=x) = 0 \text{ y } E(\varepsilon^2|X=x) = 2 \text{ para todo posible } x.$$

También sabemos que $E(X) = 2$ y $E(X^2) = 5$.

a. (0,5 puntos) Calcule la varianza condicional de Y dado que X es igual a 3 ($Var(Y|X=3)$).

b. (1,5 puntos) Calcule la varianza (no condicional) de Y ($Var(Y)$).

SOLUCIÓN:

- a. $Var(Y|X=x) = Var(\varepsilon|X=x) = E(\varepsilon^2|X=x) = 2$ para todo posible valor de x , incluyendo $x = 3$.
- b. Por la descomposición de la varianza:

$$\begin{aligned}
 Var(Y) &= Var(E(Y|X)) + E(Var(Y|X)) \\
 &= Var(E(Y|X)) + E(\varepsilon^2) \\
 &= E\left((2X)^2\right) - E(2X)^2 + E(\varepsilon^2) \\
 &= 4 \times 5 - 4 \times 4 + 2 \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

3. Los distribuidores de manzanas ecológicas (cultivadas sin pesticidas ni abonos químicos) han realizado una muestra entre sus clientes en la que han obtenido 660 observaciones de las cantidades (*ecolbs*) y precios (*ecoprc*) a los que se han vendido las manzanas. Con estos datos ha estimado la siguiente función de demanda lineal por mínimos cuadrados ordinarios utilizando el paquete estadístico E-Views:

$$ecolbs = \beta_0 + \beta_1 ecoprc + \varepsilon$$

Method: Least Squares
 Dependent variable: ecolbs
 Observations: 660

Variable	Coefficient	Std. Error	t-statistic	p-value
const	2.38813	0.371650	6.4257	0.0000
ecoprc	-0.845236	0.331500	-2.5497	0.0110
Mean of dependent variable			1.47399	
S.D. of dependent variable			2.52578	
Sum of squared residuals			4163.01	
Standard error of residuals ($\hat{\sigma}$)			2.51530	
Unadjusted R^2			0.00978349	
Adjusted $\bar{R}^2$			0.00827860	

- a (0,75 puntos) ¿Cuál es la predicción de la cantidad que comprará cada cliente si la empresa fija un precio de 1,10 €? ¿Cuál es la elasticidad de la demanda a ese precio?
- b (1,25 punto) Con el fin de determinar si los distribuidores ejercen prácticas monopolistas, se quiere contrastar que el precio fijado de 1,10 euros se sitúa en la parte elástica de la demanda (elasticidad mayor que uno en valor absoluto, donde las empresas fijan los precios cuando tienen capacidad monopolística). Escriba formalmente, en términos de los parámetros, la hipótesis nula de que la elasticidad para un precio de 1,10 es igual a uno en la dirección de la correspondiente alternativa unilateral. Realice el contraste al 5% de significación.

SOLUCIÓN:

- a El coeficiente de *ecoprc* representa en cuantas unidades cambia la cantidad demandada de manzanas si aumenta el precio en 1 euro. En este caso, un aumento de 1 euro reduce la demanda semanal en 0,845 unidades.

Si se fija un precio de 1.10 euros, la ecuación estimada por MCO nos dice que la demanda media sería $\widehat{ecolbs} = 2.38813 - 0.845236 \times 1.10 = 1.458$.

La elasticidad es $E = \left| \frac{\Delta(ecolbs)}{\Delta(ecoprc)} \frac{ecoprc}{ecolbs} \right| = -\beta_1 \frac{ecoprc}{ecolbs}$. Como $\widehat{\beta}_1 = -0.845236$, $ecoprc = 1.10$ y $\widehat{ecolbs} = 1.458$, la elasticidad estimada en el ejemplo es $\widehat{E} = 0.845236 \times \frac{1.10}{1.458} = 0.6377$

- b. La hipótesis nula es $H_0 : E = 1$ frente a una hipótesis alternativa unilateral $H_1 : E > 1$. Partimos de la hipótesis más “conservadora” (la elasticidad es unitaria) y buscamos evidencia empírica para rechazarla; en tal caso, nos quedaríamos con la hipótesis alternativa bajo la cual la demanda es elástica en ese punto.

La hipótesis nula también puede expresarse en términos del parámetro β_1 . Si $E = 1$ en el punto en que $ecoprc = 1.10$ y $ecolbs = 1.458$, el parámetro β_1 debe ser $\beta_1 = -\frac{ecolbs}{ecoprc} = -\frac{1.458}{1.10} = -1.326$. Por tanto la hipótesis nula y alternativa se pueden expresar como $H_0 : \beta_1 = -1.326$ versus $H_1 : \beta_1 < -1.326$.

El estadístico de contraste sería

$$t = \frac{\widehat{E} - 1}{se(\widehat{E})}$$

donde $\widehat{E}$ es la estimación de la elasticidad, obtenida en el apartado anterior, y $se(\widehat{E})$ es el error estándar de dicho estimador. Como este estadístico t se distribuye aproximadamente como una $N(0, 1)$ cuando las muestras son grandes, la regla de decisión consiste en rechazar H_0 al 5% cuando el valor del estadístico es mayor que el valor crítico (1,65). En este caso, el estadístico t toma el valor

$$t = \frac{-0.845236 + 1.326}{0.331500} = 1.4503$$

Por tanto, no se puede rechazar la hipótesis nula al 5%. Es decir, no hay evidencia empírica de que los distribuidores de manzanas ecológicas han fijado un precio en la zona inelástica de la demanda.

4. Un investigador dispone de datos sobre las siguientes variables: demanda de trabajo (L); producción en términos nominales (Y); salarios nominales (W); y, precios (P) para 30 sectores productivos de una economía. Con estos datos se ajustan los siguientes modelos por mínimos cuadrados (SCR es el valor de la suma cuadrática de los residuos):

$$\widehat{\log(L)} = \underset{(0.13)}{-3.12} + \underset{(0.09)}{0.42} \times \log(Y) - \underset{(0.10)}{0.34} \times \log(W) - \underset{(0.06)}{0.11} \times \log(P); SCR = 1.99 \quad (1)$$

$$\widehat{\log(L)} = \underset{(0.13)}{-2.56} + \underset{(0.07)}{0.46} \times \log(Y/P) - \underset{(0.07)}{0.34} \times \log(W/P); SCR = 2.03 \quad (2)$$

Nota: Si Y (W) es la producción en términos nominales, Y/P (W/P) es la producción (salario) en términos reales.

- a. (1 punto) Interprete cada uno de los estimadores de los coeficientes de las pendientes en la ecuación (2).
- b. (1 punto) Expresé formalmente las restricciones sobre los coeficientes del modelo (1) que dan lugar al modelo (2). Contraste estas restricciones.

SOLUCIÓN:

- a. Estimamos que un aumento en un 1% en la producción real, permaneciendo el resto de los factores constantes ("ceteris paribus"), lleva aparejada un aumento del 0,46% de la demanda de trabajo (equivalentemente podemos decir que la estimación de la elasticidad de la demanda de trabajo con respecto a la producción real es de 0,46). Por otro lado, estimamos que un aumento en un 1% en el salario real permaneciendo el resto de los factores constantes ("ceteris paribus"), lleva aparejada una disminución del 0,34% de la demanda de trabajo (equivalentemente podemos decir que la estimación de la elasticidad de la demanda de trabajo con respecto al salario real es de -0,34).

- b. Si escribimos el modelo (1) como,

$$\log(L) = \beta_0 + \beta_1 \log(Y) + \beta_2 \log(W) + \beta_3 \log(P) + \varepsilon,$$

e imponemos la restricción

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0,$$

que quiere decir que las magnitudes reales, y no las nominales, son las únicos relevantes en el modelo, obtenemos que:

$$\log(L) = \beta_0 + \beta_1 \log(Y/P) + \beta_2 \log(W/P) + \varepsilon,$$

que es nuestro modelo (2). La hipótesis nula,

$$H_0 : \beta_3 + \beta_1 + \beta_2 = 0,$$

se puede contrastar por medio de un contraste de la F, comparando los R^2 , o los $\hat{\sigma}^2$, en el modelo restringido y sin restringir. El estadístico a utilizar es,

$$F = \frac{2.03 - 1.99}{1.99/30} = 0.602,$$

que comparamos con los valores críticos de una chi-cuadrado con un grado de libertad. Por tanto, no podemos rechazar la hipótesis nula a ningún nivel de significación razonable.

5. La Universidad Carlos III de Madrid realiza todos los años un examen tipo test de Economía Española en las licenciaturas de Economía y ADE y en las conjuntas: Economía-Derecho, ADE-Derecho y Economía-Periodismo, incluidos los grupos bilingües (que sólo se imparten para las licenciaturas de Economía y ADE y no se imparten en ningún grupo de licenciaturas conjuntas), en los campus de Getafe y Colmenarejo. Este año el examen lo realizaron 953 alumnos. La nota final de cada alumno (denotada como *mark*) se encuentra entre 0 y 10, aprobando el alumno que obtiene más de 5 puntos. Se definen las siguientes variables ficticias:

$$\begin{aligned} eco &= \begin{cases} 1 & \text{si el alumno cursa la Licenciatura de Economía} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ ade &= \begin{cases} 1 & \text{si el alumno cursa la Licenciatura de ADE} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ deco &= \begin{cases} 1 & \text{si el alumno cursa la Lic. Conjunta de Economía y Derecho} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ dade &= \begin{cases} 1 & \text{si el alumno cursa la Lic. Conjunta de ADE y Derecho} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ pede &= \begin{cases} 1 & \text{si el alumno cursa la Lic. Conjunta de Periodismo y Economía} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ bil &= \begin{cases} 1 & \text{si el alumno se encuentra en un grupo bilingüe} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ colme &= \begin{cases} 1 & \text{si el alumno pertenece al campus de Colmenarejo} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ get &= \begin{cases} 1 & \text{si el alumno pertenece al campus de Getafe} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Para cada observación:

$$\begin{aligned} eco + ade + deco + dade + pede &= 1 \\ colme + get &= 1. \end{aligned}$$

Utilizando los datos individuales, se han ajustado los siguientes modelos por mínimos cuadrados ordinarios.

1. **Modelo 1:**

$$\widehat{mark} = \begin{matrix} 4.29 & + & 0.15 & ade & + & 0.44 & deco & + & 0.59 & dade & + & 0.14 & pede \\ (.087) & & (.110) & & & (.185) & & & (.147) & & & (.270) \\ & & -0.06 & colme & - & 0.42 & bili \\ & & (.143) & & & (.165) & \end{matrix}$$

$$n = 953; R^2 = 0.031606163$$

Modelo 2: Se generan nuevas dummies interactuando *bili*, *eco* y *ade*:

$ecobili = eco \times bili$; $adebili = ade \times bili$; $adenbili = ade \times (1 - bili)$

$$\widehat{mark} = \begin{matrix} 4.24 & + & 0.24 & adenbili & + & 0.49 & deco & + & 0.65 & dade & + & 0.19 & pede \\ (.089) & & (.117) & & & (.186) & & & (.149) & & & (.270) \\ & & -0.08 & colme & + & 0.11 & ecobili & - & 0.44 & adebili \\ & & (.143) & & & (.289) & & & (.205) & \end{matrix}$$

$$n = 953; R^2 = 0.036782499$$

Téngase en cuenta que el bilingüe sólo se imparte en las licenciaturas de Economía y ADE, y en consecuencia:

$$adebili + ecobili = bili$$

- a. **(0,5 puntos)** Utilizando el ajuste del Modelo 1, calcule las estimaciones de las diferencias de las notas medias entre la Licenciatura de Economía y cada una de las demás titulaciones.
- b. **(1 punto)** Utilizando el ajuste del primer modelo, contraste al 1% de significación cada una de las hipótesis individuales de que las notas en cada una de las licenciaturas conjuntas es superior a la nota de la Licenciatura de Economía. Contraste al 5% si las notas no dependen del campus en que ha cursado la asignatura. En cada caso escriba cuidadosamente la hipótesis nula y la alternativa en términos de los parámetros del modelo, especificando si el contraste es unilateral o bilateral y explicando su implementación.
- c. **(0,5 puntos)** ¿Existe evidencia empírica de que las diferencias de notas entre el grupo bilingüe y los demás grupos dependen de la titulación? Justifique cuidadosamente su respuesta. (Pista: Tenga en cuenta que $adebili + ecobili = bili$)

RESPUESTA:

a. Permaneciendo todo lo demás constantes se estima que, en media, la:

- Diferencia entre Economía y ADE es de 0,15 puntos.
- Diferencia entre Economía y Conjunta Economía y Derecho es de 0,44 puntos.
- Diferencia entre Economía y Conjunta ADE y Derecho es de 0,59 puntos.
- Diferencia entre Economía y Conjunta Economía y Periodismo es de 0,14 puntos.

b. Formalmente, en el modelo

$$mark = \beta_0 + \beta_1 ade + \beta_2 deco + \beta_3 dade + \beta_4 pede + \beta_5 colme + \varepsilon,$$

se pide contrastar:

- Que las notas en la conjunta Derecho y Economía son mayores que en Economía

$$H_0 : \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_2 > 0.$$

Utilizamos el *t-ratio*

$$t = \frac{0.44}{0.185} = 2,378378378$$

La $\Pr(N(0,1) > 2.326) = 0.01$. Por tanto rechazamos H_0 al 1% de significación.

- Que las notas en la conjunta Derecho y ADE son mayores que en Economía

$$H_0 : \beta_3 = 0$$

$$H_1 : \beta_3 > 0.$$

Utilizamos el $t - ratio$

$$t = \frac{0.59}{0.147} = 4,013605442$$

Por tanto rechazamos H_0 al 1% de significación.

- Que las notas en la conjunta Economía y Periodismo son mayores que en Economía

$$H_0 : \beta_4 = 0$$

$$H_1 : \beta_4 > 0.$$

Utilizamos el $t - ratio$

$$t = \frac{0.14}{0.270} = 0,518518519$$

Por tanto no podemos rechazar H_0 al 1% de significación, ni a ningún otro nivel de significación razonable.

Concluimos que la Licenciatura Conjunta Economía y Periodismo no tiene notas superiores que la Licenciatura en Economía. Sin embargo, todas las demás conjuntas si que tienen notas superiores.

El contraste de que las notas no dependen del campus en que se ha impartido la asignatura se puede expresar en términos de los parámetros del modelo como:

$$H_0 : \beta_5 = 0$$

$$H_1 : \beta_5 \neq 0.$$

Utilizamos el $t - ratio$

$$t = \frac{-0.06}{0.143} = -0,41958042.$$

Por tanto no podemos rechazar la hipótesis nula de que no hay diferencia en las notas dependiendo del campus.

c. El Modelo 2 es el modelo sin restringir

$$mark = \beta_0 + \beta_1 adenbili + \beta_2 deco + \beta_3 dade + \beta_4 pede$$

$$+ \beta_5 colme + \beta_6 ecobili + \beta_7 adebili + \varepsilon,$$

donde el grupo de referencia es el grupo de economía no bilingüe y aparecen las variables interactivas de la variable ficticia bilingüe con las dos licenciaturas principales y la variable ficticia de ade con no-bilingüe (*adenbili*).

Los diferenciales de notas de este modelo para las dos titulaciones que imparten bilingüe (Economía y ADE) son:

	No-bilingüe	Bilingüe	Diferencial
Economía	β_0	$\beta_0 + \beta_6$	β_6
ADE	$\beta_0 + \beta_1$	$\beta_0 + \beta_7$	$\beta_7 - \beta_1$

Por tanto se pide contrastar la hipótesis

$$H_0 : \beta_7 - \beta_1 = \beta_6$$

en la dirección de la alternativa

$$H_1 : \beta_7 - \beta_1 \neq \beta_6.$$

Si incorporamos la restricción H_0 dentro del modelo 2 obtenemos el modelo restringido:

$$\begin{aligned} \text{mark} = & \beta_0 + \beta_1 \text{ade} + \beta_2 \text{deco} + \beta_3 \text{dade} + \beta_4 \text{pede} \\ & + \beta_5 \text{colme} + \beta_6 \text{bili} + \varepsilon, \end{aligned}$$

que es el modelo 1, donde no aparecen las tres variables interactivas. Por tanto podemos realizar un contraste utilizando el estadístico F basado en la diferencia entre los coeficientes de determinación:

$$F = \frac{0.036782499 - 0.031606163}{(1 - 0.036782499)/953} = 5,121427095$$

Este estadístico de contraste se distribuye aproximadamente como un chi-cuadrado con un grado de libertad bajo la hipótesis nula. Por tanto, rechazamos la hipótesis nula a cualquier nivel de significación razonable y concluimos que las notas en los grupos bilingües dependen de la titulación.

VALORES CRÍTICOS:

$N(0, 1)$
$\Pr(N(0, 1) > 0,005) = 2,576$
$\Pr(N(0, 1) > 0,01) = 2,326$
$\Pr(N(0, 1) > 0,025) = 1,960$
$\Pr(N(0, 1) > 0,05) = 1,645$
$\Pr(N(0, 1) > 0,10) = 1,282$

$\chi^2_{(1)}$	$\chi^2_{(2)}$	$\chi^2_{(3)}$
$\Pr(\chi^2_{(1)} > 0,01) = 6,63$	$\Pr(\chi^2_{(2)} > 0,01) = 9,21$	$\Pr(\chi^2_{(3)} > 0,01) = 11,34$
$\Pr(\chi^2_{(1)} > 0,05) = 3,84$	$\Pr(\chi^2_{(2)} > 0,05) = 5,99$	$\Pr(\chi^2_{(3)} > 0,05) = 7,81$
$\Pr(\chi^2_{(1)} > 0,10) = 2,71$	$\Pr(\chi^2_{(2)} > 0,10) = 4,61$	$\Pr(\chi^2_{(3)} > 0,10) = 6,25$

Recordamos que una t de Student con n grados de libertad se comporta como un $N(0, 1)$ para n razonablemente grande ($n \geq 30$). Por otro lado, una F de Fisher con q grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador se comporta como una $\chi^2_{(q)}/q$ para n razonablemente grande ($n \geq 30$).