Estadística. Tema 4

Desigualdades

Objetivos

1. Relación entre momentos y distribución de probabilidades.
2. Relación entre momentos marginales y conjuntos.

Bibliografía

Dekking et al. (2005). Capítulo 8.

Wasserman (2005). Capítulo 4.

Wooldridge (2006). Apéndice B.

4.1. Desigualdades de Markov y Chebyshev

Desigualdad de Markov. Sea X una VA no negativa y $E(X)$ existe. Entonces, para cualquier $t \geq 0$,

$$\Pr(X > t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

Prueba.

Desigualdad de Chebyshev. Sea $\mu = E(X)$ y $\sigma^2 = V(X)$. Entonces

$$\begin{aligned} \Pr(|X - \mu| \geq t) &\leq \frac{\sigma^2}{t} \\ \Pr(|Z| \geq k) &\leq \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

donde $Z = (X - \mu)/\sigma$.

Prueba: usar Markov.

Uso: intervalos de confianza.

4.2. Desigualdades de Jensen y Cauchy-Schwartz

Desigualdad de Cauchy Schwartz. Si X e Y tienen varianza finita, entonces

$$\begin{aligned} E|XY| &\leq \sqrt{EX^2EY^2} \\ |\rho_{XY}| &\leq 1. \end{aligned}$$

Desigualdad de Jensen. Si g es convexa, entonces

$$E\left(g\left(X\right)\right) \geq g\left(E\left(X\right)\right).$$

Si g es concava, entonces

$$E\left(g\left(X\right)\right) \leq g\left(E\left(X\right)\right).$$

Ejemplos: funciones convexas: x^2, e^x. Funciones Cóncavas: $-x^2, \log x$.

Prueba: sea $L\left(X\right) = a + bx$ la recta tangente a $g\left(x\right)$ en $x = EX$. Si g es convexa, estará encima de la recta $L\left(x\right)$:

$$Eg\left(X\right) \geq L\left(X\right) = E\left(a + bX\right) = a + bE\left(X\right) = L\left(E\left(X\right)\right) = g\left(EX\right).$$