Estadística. Tema 2

Variables Aleatorias

2.1. Funciones de distribución y probabilidad

2.2. Ejemplos distribuciones discretas y continuas

2.3. Distribuciones conjuntas y marginales

2.4. Ejemplos distribuciones multivariantes

2.5. Variables aleatorias independientes

2.6. Transformación variables aleatorias

Objetivos

1. Relación probabilidad y variable aleatoria.
2. Distinción entre variables continuas y discretas.
3. Independencia de variables aleatorias.

Bibliografía

Dekking et al. (2005). Capítulos 3-5.

Wasserman (2005). Capítulo 2.

Wooldridge (2006). Apéndice B.

2.1. Funciones de distribución y probabilidad

Variable aleatoria: una VA es un mapping

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

que asigna un número real $X(\omega)$ a cada resultado ω.

Ejemplos.

Función de distribución acumulada CDF: es una función $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida como

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x).$$

La CDF contiene toda la información sobre la VA: si X tiene CDF F e Y tienen CDF G, entonces si $F(x) = G(x)$ para todo x, entonces $\Pr(X \in A) = \Pr(Y \in A)$ para todo A.

Ejemplos.

■ Una función F es una CDF sí y sólo sí:

- F es no decreciente.
- F está normalizada:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} F(x) &= 0 \\ \lim_{x \to \infty} F(x) &= 1. \end{aligned}$$

- F es continua por la derecha:

$$\lim_{y \to x, y > x} F(y) = F(x).$$

Una VA X es **discreta** si toma un número contable de valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Su función de **probabilidad o función de masa de probabilidad** se define como

$$f_X(x) = \Pr(X = x).$$

Por lo tanto $f_X(x) \geq 0$ y $\sum_i f_X(x_i) = 1$. Además

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i).$$

Ejemplos: Uniforme.

Una VA X es **continua** si existe una función f_X tal que $f_X(x) \geq 0$ para todo x y $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ y para cada $a \leq b$,

$$\Pr(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$

La función f_X se denomina f**unción de densidad de probabilidad, PDF**. Además

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

y $f_X(x) = F'(x)$ en todos los puntos x en los que F_X es diferenciable.

En este caso $\Pr(X = x) = 0$ y $\Pr(X = x) \neq f_X(x)$. Además $f_X(x)$ puede ser mayor que 1.

Ejemplos: Uniforme.

■ Lema:

$$\begin{aligned}
\Pr(X = x) &= F(x) - \lim_{y \to x, y < x} F(y) \\
\Pr(x < X \leq y) &= F(y) - F(x) \\
\Pr(X > x) &= 1 - F(x)
\end{aligned}$$

Si X es continua

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= \Pr(a < X < b) = \Pr(a < X \leq b) \\
&= \Pr(a \leq X < b) = \Pr(a \leq X \leq b).
\end{aligned}$$

Inversa CDF o función cuantílica:

$$F^{-1}(q) = \text{ínf}\{x : F(x) > q\}, \quad q \in [0,1].$$

Si F es estrictamente creciente, entonces $F^{-1}(q)$ es el único número x tal que $F(x) = q$.

Quartiles. Mediana. Igualdad en distribución.

$X \sim F$.

2.2. Ejemplos distribuciones discretas y continuas

VA DISCRETAS:

Punto de masa.

Uniforme.

Bernoulli.

Binomial.

Geométrica.

Poisson.

VA CONTINUAS:

Uniforme.

Normal o Gaussiana. $N(\mu, \sigma^2)$.

Normal Estándar $N(0,1)$. Su CDF se denomina Φ y su PDF ϕ.

Propiedades:

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow X = \mu + \sigma Z \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

Si $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$ son independientes, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

Además, si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} \Pr(a < X < b) &= \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Ejemplos.

Exponencial:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}.$$

Gamma.

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}.$$

t, Cauchy (t_1), χ^2.

2.3. Distribuciones conjuntas y marginales

DISTRIBUCIONES CONJUNTAS

VA discretas: Distribución de (probabilidad) masa conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \Pr(X = x \cap Y = y) = \Pr(X = x, Y = y)$$

Ejemplos.

VA continuas: $f_{XY}(x,y)$ es una PDF para las variables aleatorias (X,Y) si

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) &\geq 0 \text{ para todo } (x,y). \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dxdy &= 1 \end{aligned}$$

Para cualquier conjunto $A \in R \times R$,

$$\Pr((X,Y) \in A) = \int\int_A f_{XY}(x,y)\,dxdy.$$

Función acumulada de probabilidad, CDF,

$$F_{XY}(x,y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(r,s)\,drds.$$

Ejemplos.

DISTRIBUCIONES MARGINALES

VA Discretas. Si (X,Y) tiene distribución conjunta $f_{X,Y}$, entonces la función de masa marginal de X se define como

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \sum_y \Pr(X = x, Y = y) = \sum_y f_{X,Y}(x,y).$$

Ejemplo.

VA Continuas.

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy.$$

Ejemplos.

Función de probabilidad conjunta para v.a.s discretas:

$Y \backslash X$	$f_X(x_1)$	$f_X(x_2)$	$\cdots$	$f_X(x_s)$	
$f_Y(y_1)$	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1s}	p_{y1}
$f_Y(y_2)$	p_{21}	p_{22}		p_{2s}	p_{y2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$f_Y(y_m)$	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{ms}	p_{ym}
	p_{x1}	p_{x2}	$\cdots$	p_{xs}	1

$$\begin{cases} f_{X,Y}(x_j, y_i) = \Pr\{X = x_j \text{ y } Y = y_i\} \\ f_Y(y_i) = \Pr\{Y = y_i\} = \sum_{j=1}^{s} f_{X,Y}(x_j, y_i) \\ f_X(x_j) = \Pr\{X = x_j\} = \sum_{i=1}^{m} f_{X,Y}(x_j, y_i) \end{cases}$$

Ejemplo: en una población con un número muy elevado de individuos se considera el experimento de seleccionar uno al azar y observar dos variables,

$$\begin{aligned} Y &\to \text{"Número de veces que ha estado desempleado"} \\ X &\to \text{"Número de titulaciones académicas"} \end{aligned}$$

donde las probabilidades de cada combinación de valores viene dada por la siguiente tabla,

$Y \backslash X$	1	2	3	
1	0,4	0,2	0,05	0,65
2	0,2	0,1	0	0,3
3	0,05	0	0	0,05
	0,65	0,3	0,05	1

2.4. Variables aleatorias independientes

Dos VA X e Y son independientes si para cada A y B,

$$\Pr(X \in A, Y \in B) = \Pr(X \in A)\Pr(Y \in B).$$

Teorema. Si X e Y tienen PDF conjunta $f_{X,Y}$, entonces X e Y son independientes sí y sólo sí

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

para todos x e y.

Ejemplos.

Si $f_{X,Y}(x,y) = g(x)\, h(y)$ entonces X e Y son independientes.

Distribuciones condicionales

VA Discretas: la función de masa condicional es

$$f_{Y|X}(y|x) = \Pr(Y = y|X = x) = \frac{\Pr(X = x, Y = y)}{\Pr(X = x)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

si $f_X(x) > 0$.

VA Continuas: la función de densidad de probabilidad condicional es

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

si $f_X(x) > 0$. Por tanto

$$\Pr(Y \in A|X = x) = \int_A f_{Y|X}(y|x)\, dx.$$

■ Independencia: Si X e Y son independientes, entonces $f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)$ para todo y, y todo x tal que $f_X(x) > 0$.

Ejemplo. VA Discreta. Las probabilidades de Y dado X están dadas por

Y	$\Pr\{Y = y_i \mid X = x_1\}$	$\Pr\{Y = y_i \mid X = x_2\}$	$\cdots$	$\Pr\{Y = y_i \mid X = x_s\}$
y_1	$f_{11} = p_{11}/p_{x1}$	$f_{12} = p_{12}/p_{x2}$	$\cdots$	$f_{1s} = p_{1s}/p_{xs}$
y_2	$f_{21} = p_{21}/p_{x1}$	$f_{22} = p_{22}/p_{x2}$		$f_{2s} = p_{2s}/p_{xs}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
y_m	$f_{m1} = p_{m1}/p_{x1}$	$f_{m2} = p_{m2}/p_{x2}$	$\cdots$	$f_{ms} = p_{ms}/p_{xs}$
	1	1	$\cdots$	1

y para nuestro ejemplo,

$Y \backslash X$	1	2	3	
1	$0,4$	$0,2$	$0,05$	$0,65$
2	$0,2$	$0,1$	0	$0,3$
3	$0,05$	0	0	$0,05$
	$0,65$	$0,3$	$0,05$	1

se obtiene:

Y	$\Pr\{Y = y_i \mid X = 1\}$	$\Pr\{Y = y_i \mid X = 2\}$	$\Pr\{Y = y_i \mid X = 3\}$
1	$f_{11} = 0,4/0,65 = 0{,}615$	$f_{12} = 0,2/0,3 = 0,667$	$f_{13} = 0,05/0,05 = 1$
2	$f_{21} = 0,2/0,65 = 0{,}308$	$f_{22} = 0,1/0,3 = 0,333$	$f_{23} = 0$
3	$f_{31} = 0,05/0,65 = 0{,}077$	$f_{32} = 0$	$f_{33} = 0$
	1	1	1

Distribuciones Multivariantes y muestras IID.

Vector aleatorio: $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ donde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son VA, con PDF $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Distribuciones Marginales, condicionadas, etc.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes si para cada $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$\Pr(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i \in A_i).$$

Definición: si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes y cada una tiene la misma distribución marginal con CDF F, entonces decimos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **IID** (independientes e idénticamente distribuidas) y se escribe

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim F.$$

También decimos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son una muestra aleatoria de tamaño n de F.

2.5. Ejemplos distribuciones multivariantes

Multinomial(n,p) , donde $p=(p_1,\ldots,p_k)$, $p_1+\cdots+p_k=1$,

$$f(x_1,\ldots,x_k)=\begin{pmatrix} n \\ x_1\cdots x_k \end{pmatrix} p_1^{x_1}\cdots+p_k^{x_k},$$

con $x_1+\cdots x_k=n$,

$$\begin{pmatrix} n \\ x_1\cdots x_k \end{pmatrix}=\frac{n!}{x_1!\cdots x_k!}.$$

Normal Multivariante. $X\sim N_k(\mu,\Sigma)$

$$f(x_1,\ldots,x_k)=f(x)=(2\pi|\Sigma|)^{-k/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

con

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}$$

y media

$$\mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} EX_1 \\ EX_2 \\ \vdots \\ EX_k \end{pmatrix}$$

y matriz de varianzas-covarianzas Σ,

$$\Sigma=\begin{pmatrix} V(X_1) & \cdots & C(X_1,X_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(X_k,X_1) & \cdots & V(X_k) \end{pmatrix}.$$

2.6. Transformación variables aleatorias

Si X es una VA con PDF f_X y CDF F_X, consideramos una función $Y = r(X)$, que también es una VA (una transformación de X).

Cálculo de la PDF y CDF de Y.

Caso Discreto:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \Pr(Y = y) = \Pr(r(X) = y) \\ &= \Pr(\{x; r(x) = y\}) = \Pr\left(X \in r^{-1}(y)\right). \end{aligned}$$

Ejemplo.

Caso continuo:

1. Para cada y, encontrar el conjunto $A_y = \{x : r(x) \leq y\}$.
2. Encontrar la CDF:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(r(X) \leq y) \\ &= \Pr(\{x; r(x) \leq y\}) \\ &= \int_{A_y} f_X(x)\, dx. \end{aligned}$$

3. La PDF es $f_Y(y) = F'(y)$.

Ejemplo.

Cuando r es estrictamente monótona creciente o estrictamente monótona decreciente, entonces r tiene inversa $s = r^{-1}$ y en ese caso se puede demostrar que

$$f_Y(y) = f_X(s(y)) \left| \frac{ds(y)}{dy} \right|.$$

Caso multivariante es similar, pero ahora, por ejemplo, $A_y = \{(x, y) : r(x, y) \leq y\}$.