Estadística. Tema 1

Probabilidad

1.1. Espacios muestrales y sucesos

1.2. Probabilidad. Propiedades

1.3. Independencia. Probabilidad condicionada

1.4. Teorema de Bayes.

Objetivos

1. Manejo concepto y propiedades básicas de la probabilidad
2. Idea de probabilidad condicionada y sus aplicaciones
3. Concepto de independencia y su relación con el muestreo

Bibliografía

Dekking et al. (2005). Capítulos 1-2.

Wasserman (2005). Capítulo 1.

Wooldridge (2006). Apéndice B.

En esta parte estudiamos un tipo especial de modelos matemáticos, los modelos probabilísticos, de los que los modelos económicos/econométricos son un ejemplo. Los modelos probabilísticos incorporan el concepto de probabilidad para que sean válidos para todos los individuos de una población y así explicar cómo se recogen los datos y la incertidumbre debida a que no poseemos información sobre todos los factores que explican su comportamiento. Además nos permiten caracterizar conceptos como causalidad y efectos *ceteris paribus* en modelos económicos.

1.1. Espacios muestrales y sucesos

Espacio muestral Ω.

Resultados muestrales - Realizaciones - elementos ω

Eventos.

Ejemplos: dados, monedas, elección al azar.

Tipos de sucesos:

Complementario A^c.

Unión de sucesos $A \cup B$.

Intersección $A \cap B = AB$.

Conjunto diferencia $A - B = AB^c$

Suceso seguro y suceso imposible, $\Omega, \varnothing$.

Sucesos disjuntos o mutuamente exclusivos. Partición.

Inclusión de sucesos, $A \subset B$.

1.2. Probabilidad. Propiedades

Probabilidad, o distribución (medida) de probabilidad: Pr, P, ó $\mathbb{P}$.

A function Pr que asigna un número real a cada suceso* es una distribución de probabilidad si:

- $\Pr(A) \geq 0$ for every A.
- $\Pr(\Omega) = 1$.
- Si $A_1, A_2, \ldots$ son disjuntos, entonces

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i).$$

Interpretaciones: frecuentista; grado de creencia.

Propiedades:

$$\begin{array}{rcl}
\Pr(\varnothing) & = & 0 \\
A \subset B & \Rightarrow & \Pr(A) \leq \Pr(B) \\
0 & \leq & \Pr(A) \leq 1 \\
\Pr(A^c) & = & 1 - \Pr(A) \\
A \cap B = & \varnothing \Rightarrow & \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)
\end{array}$$

Lema:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$$

Ejemplos.

Probabilidades en espacios finitos: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

Si cada resultado es equiprobable, entonces

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

la que se denomina distribución de probabilidad uniforme [combinatoria].

*: σ -álgebra $\mathcal{A}$, de tal forma que $\varnothing \in \mathcal{A}$, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ si $A_i \in \mathcal{A}$ y $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

Los sucesos en *: σ -álgebra $\mathcal{A}$ son llamados medibles.

$(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ es un espacio probabilístico.

Si Ω es la recta real, $\mathbb{R}$, entonces se toma $\mathcal{A}$ como la menor σ -álgebra que contiene los conjuntos abiertos, llamada σ -álgebra de Borel.

1.3. Independencia. Probabilidad condicionada

Dos sucesos son independientes si

$$\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B).$$

Un conjunto de sucesos $\{A_i, i \in I\}$ son independientes si

$$\Pr(\cap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J} \Pr(A_i)$$

para cualquier subconjunto finito J de I.

A veces independencia se asume por las condiciones del experimento. Otras se demuestra directamente.

Sucesos disjuntos con probabilidad positiva no pueden ser independientes.

Ejemplos.

Probabilidad Condicionada. Si $\Pr(B) > 0$, entonces la probabilidad condicionada de A dado B, es

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)}.$$

Interpretación. $\Pr(\cdot|B)$ es una probabilidad (donde ahora B juega el papel de Ω).
$\Pr(A|\cdot)$ en general no es una probabilidad

Intuición $\Pr(A|B)$ vs $\Pr(B|A)$.

Lema: si A y B son sucesos independientes, entonces $\Pr(A|B) = \Pr(A)$.

Lema: para cualquier par de sucesos A y B,

$$\Pr(AB) = \Pr(A|B)\Pr(B) = \Pr(B|A)\Pr(A).$$

Interpretación de independencia.

Ejemplos.

1.4. Teorema de Bayes

Ley de Probabilidades Totales. Sea $A_1, \ldots, A_k$ una partición de Ω. Entonces, para cualquier suceso B,

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{k} \Pr(B|A_i) \Pr(A_i).$$

Prueba?

Teorema de Bayes. Sea $A_1, \ldots, A_k$ una partición de Ω tal que $\Pr(A_i) > 0$ para cada i. Entonces, si $\Pr(B) > 0$, para cada $i = 1, \ldots, k$,

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(B|A_i) \Pr(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} \Pr(B|A_i) \Pr(A_i)}.$$

$\Pr(A_i|B)$ es la probabilidad de A_i a posteriori. $\Pr(A_i)$ es la probabilidad de A_i a priori.

Ejemplo.