Solución Hoja de Ejercicios 5

Estadística

1. *Sean $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de VAs. Demuestra que $X_n \to_2 b$ si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = b \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} V(X_n) = 0.$$

Tenemos que $X_n \to_2 b$ si y sólo si $E(X_n - b)^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}
E(X_n - b)^2 &= E(X_n \pm E(X_n) - b)^2 \\
&= E(\{X_n - E(X_n)\} - \{b - E(X_n)\})^2 \\
&= E\{X_n - E(X_n)\}^2 + E\{b - E(X_n)\}^2 - 2\{b - E(X_n)\}\overbrace{E\{X_n - E(X_n)\}}^{=0} \\
&= V(X_n) + \{b - E(X_n)\}^2.
\end{aligned}$$

2. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ IID con media $\mu = EX_1$ y varianza $\sigma^2 = V(X_1)$. Sea $\bar{X}_n$ la media muestral. Demuestra que $\bar{X}_n \to_2 \mu$.*

   $\bar{X}_n \to_2 \mu$ si $E\left(\bar{X}_n - \mu\right)^2 = V\left(\bar{X}_n\right) + \left\{\mu - E\left(\bar{X}_n\right)\right\}^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $E\left(\bar{X}_n\right) = \mu$ y $V\left(\bar{X}_n\right) = \sigma^2/n \to 0$, se demuestra que $E\left(\bar{X}_n - \mu\right)^2 \to 0$.

3. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ IID con media $\mu = EX_1$ y varianza $\sigma^2 = V(X_1)$. Sea $\bar{X}_n$ la media muestral y sea S_n^2 la varianza muestral.*

   a) *Ya sabemos que $ES_n^2 = \sigma^2$. ¿Entonces podemos concluir que $S_n^2 \to_p \sigma^2$ y/o $S_n^2 \to_2 \sigma^2$? ¿Qué nos faltaría? Razona tu respuesta.*

      Sabemos que S_n^2 tiene esperanza σ^2, pero eso no garantiza $S_n^2 \to_p \sigma$ (porque no dice nada acerca de la probabilidad cuando $n \to \infty$) ni que $S_n^2 \to_p \sigma^2$ (porque no dice nada de $V\left(S_n^2\right)$).

   b) *Alternativamente, escribe*

$$S_n^2 = c_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - d_n \bar{X}_n^2$$

      y demuestra que $c_n \to 1$ y que $d_n \to 1$. Entonces aplica la LGN a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ y a $\bar{X}_n$. Luego utiliza las propiedades de $\to_p$ para encontrar el $p\lim$ de S_n^2.

      Tenemos que

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left\{X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\bar{X}_n^2 + n\bar{X}_n^2\right\} \\
&= \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}_n^2.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
p\lim_{n\to\infty} S_n^2 &= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\right)\left(p\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\right)\left(p\lim_{n\to\infty}\bar{X}_n\right)^2\\
&= 1E\left(X_1^2\right)-1\cdot(\mu)^2\\
&= E\left(X_1^2\right)-\mu^2=V\left(X_1\right)=\sigma^2.
\end{aligned}$$

4. *Suponga que* $\Pr(X=1)=\Pr(X=-1)=1/2$. *Define*

$$X_n=\begin{cases} X & \text{con probabilidad } 1-\frac{1}{n}\\ e^n & \text{con probabilidad } \frac{1}{n}.\end{cases}$$

¿Converge X_n *a* X *en probabilidad?*

Sí, porque

$$\Pr\left(|X_n-X|>\epsilon\right)\le\Pr\left(X_n=e^n\right)=\frac{1}{n}\to 0.$$

¿Converge X_n *a* X *en distribución?*

Sí, porque $X_n\to_p X$ implica que $X_n\to_d X$.

¿Converge $E\left(X_n-X\right)^2$ *a cero?*

No, porque

$$E\left(X_n-X\right)^2=0^2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+e^{2n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{e^{2n}}{n}\to\infty.$$

5. *Suponga que* $X_n\sim N=(0,1/n)$ *y sea* X *una VA con distribución* $F(x)=0$ *si* $x<0$ *and* $F(x)=1$ *si* $x\ge 0$. *¿Converge* X_n *a* X *en probabilidad?*

Sí, porque

$$\Pr\left(|X_n-X|>\epsilon\right)=\Pr\left(|X_n|>\epsilon\right)\le\frac{E\left(X_n\right)^2}{\epsilon^2}=\frac{1/n}{\epsilon^2}\to 0.$$

¿Converge X_n *a* X *en distribución?*

Sí, porque $X_n\to_p X$ implica que $X_n\to_d X$.

6. *Sean* $X_1,X_2,\ldots,X_n$ *vectores aleatorios IID con*

$$X_i=\begin{pmatrix}X_{1i}\\X_{2i}\end{pmatrix}$$

con media

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}EX_{1i}\\EX_{2i}\end{pmatrix}$$

y matriz de varianzas-covarianzas Σ. *Sean*

$$\bar{X}_{1n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\ \text{ y }\ \bar{X}_{2n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}$$

y define $Y_n=\bar{X}_{1n}/\bar{X}_{2n}$. *Encuentra la distribución límite de* Y_n.

Tenemos que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\bar{X}_{1n}-\mu_1\\\bar{X}_{2n}-\mu_2\end{pmatrix}\to_d N\left(0,\Sigma\right)$$

y por otro lado la función $g(x_1, x_2) = x_1/x_2$ satisface $g(\mu_1, \mu_2) = \mu_1/\mu_2$ y

$$\nabla g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1/x_2 \\ -x_1/x_2^2 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\nabla_\mu = \nabla g(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} 1/\mu_2 \\ -\mu_1/\mu_2^2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\sqrt{n}(Y_n - \mu_1/\mu_2) \to_d N\left(0, \nabla_\mu^T \Sigma \nabla_\mu\right)$$

donde

$$\nabla_\mu^T \Sigma \nabla_\mu = \begin{pmatrix} 1/\mu_2 \\ -\mu_1/\mu_2^2 \end{pmatrix}' \Sigma \begin{pmatrix} 1/\mu_2 \\ -\mu_1/\mu_2^2 \end{pmatrix},$$

asumiendo que $\mu_2 \neq 0$.