Soluciones Hoja de Ejercicios 4

Estadística

1. *Sea X una VA exponencial(β),*

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x > 0.$$

Encuentra $\Pr(|X - \mu_X| \geq k\sigma_X)$ *para* $k > 1$. *Compara el resultado con la acotación que se obtiene usando la desigualdad de Chebyshev.*

Tenemos que $EX = \mu_X = \beta$ y $VX = \sigma_X^2 = \beta^2$, y $F_X(x) = 1 - \exp(-x/\beta)$, $x > 0$, $= 0$, $x < 0$. por lo que

$$\begin{aligned}
\Pr(|X - \mu_X| \geq k\sigma_X) &= \Pr(|X - \beta| \geq k\beta) \\
&= 1 - \Pr(-k\beta \leq X - \beta \leq k\beta) \\
&= 1 - \Pr(-(k-1)\beta \leq X \leq (k+1)\beta) \\
&= 1 - \{\Pr(X \leq (k+1)\beta) - \Pr(X \leq -(k-1)\beta)\} \\
&= 1 - F_X((k+1)\beta) + F_X(-(k-1)\beta) \\
&= 1 + \exp(-(k+1)) - \exp((k-1)),
\end{aligned}$$

si $k \leq 1$, y

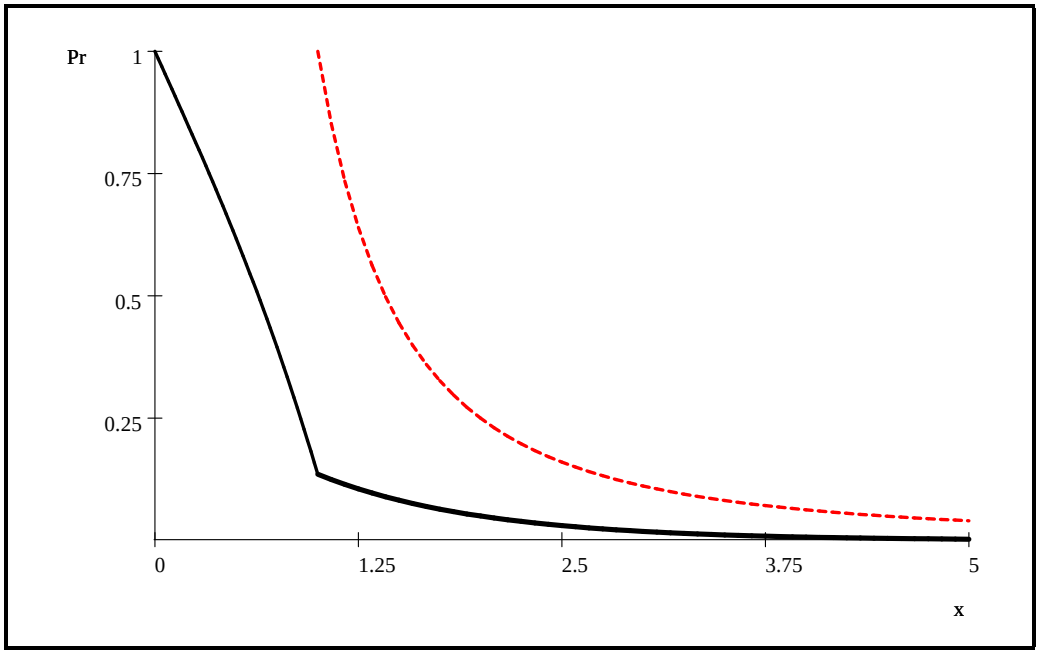
$$\begin{aligned}
\Pr(|X - \mu_X| \geq k\sigma_X) &= 1 - \Pr(X \leq (k+1)\beta) + \Pr(X \leq -(k-1)\beta) \\
&= 1 - F_X((k+1)\beta) + 0 \\
&= \exp(-(k+1)),
\end{aligned}$$

si $k \geq 1$.

Usando Chebyshev tenemos que

$$\Pr(|X - \mu_X| \geq k\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}$$

y podemos comprobar que Chebyshev sobreestima la probabilidad de las colas en una elevada proporción:



2. *Sea X una VA $N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Encuentra en las tablas $\Pr\left(|X-\mu_X|\geq k\sigma_X\right)$ para $k=1,2,3$ y compara el resultado con la acotación obtenida con la desigualdad de Chebyshev.*

Chebyshev proporciona estas acotaciones:

$$\begin{aligned}\Pr\left(|X-\mu_X|\geq \sigma_X\right) &= \frac{1}{1}=1\\ \Pr\left(|X-\mu_X|\geq 2\sigma_X\right) &= \frac{1}{4}=0{,}25\\ \Pr\left(|X-\mu_X|\geq 3\sigma_X\right) &= \frac{1}{9}=0{,}1111,\end{aligned}$$

mientras que podemos encontrar que

$$\begin{aligned}\Pr\left(|X-\mu_X|\geq k\sigma_X\right) &= \Pr\left(\left|\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right|\geq k\right)\\ &= \Pr\left(|Z|\geq k\right)\\ &= 2\left(1-\Phi\left(k\right)\right)\end{aligned}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}2\left(1-\Phi\left(1\right)\right) &= 2\left(1-0{,}84134\right)=0{,}3173\\ 2\left(1-\Phi\left(2\right)\right) &= 2\left(1-0{,}97725\right)=0{,}0455\\ 2\left(1-\Phi\left(3\right)\right) &= 2\left(1-0{,}99865\right)=0{,}0027.\end{aligned}$$