Soluciones Hoja de Ejercicios 3

Estadística

1. *Demuestra que* $V(X) = 0$ *si y sólo si hay una constante* c *tal que* $\Pr(X = c) = 1$.

   Si $\Pr(X = c) = 1$ entonces claramente $EX = \mu = c$ y $EX^2 = c^2$ y por tanto

$$\begin{aligned} V(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= c^2 - (c)^2 = 0. \end{aligned}$$

   Si $V(X) = 0$, eso significa que $E(X-\mu)^2 = 0$, y como $(X-\mu)^2 \geq 0$, necesariamente, $(X-\mu)^2 = 0$ con probabilidad 1, es decir $X = \mu = c$ con probabilidad 1.

2. *Demuestra que el valor esperado de una VA* $B(n,p)$ *es* np *y su varianza es* $np(1-p)$.

   Tenemos que su $X \sim B(n,p)$, entonces podemos escribir

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad Y_i \sim \text{ Bernoulli}(p) \text{ IID},$$

   entonces, usando que Y_i tienen igual media p,

$$EX = \sum_{i=1}^{n} EY_i = \sum_{i=1}^{n} p = np,$$

   y usando independencia,

$$VX = \sum_{i=1}^{n} VY_i = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

3. *Demuestra que* $E\left(S_n^2\right) = \sigma^2$ *si* $X_1, \ldots, X_n$ *es una muestra IID.*

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n \pm \mu\right)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left([X_i - \mu] - \left[\bar{X}_n - \mu\right]\right)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left([X_i - \mu]^2 - 2[X_i - \mu]\left[\bar{X}_n - \mu\right] + \left[\bar{X}_n - \mu\right]^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [X_i - \mu]^2 - 2n\left[\bar{X}_n - \mu\right]^2 + n\left[\bar{X}_n - \mu\right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [X_i - \mu]^2 - n\left[\bar{X}_n - \mu\right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

   Ahora,

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} [X_i - \mu]^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E[X_i - \mu]^2 = n\sigma^2,$$

mientras que, usando independencia y por tanto incorrelación de las X_i,

$$\begin{aligned}
E\left[\bar{X}_n-\mu\right]^2 &= Var\left[\bar{X}_n\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right]^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E\left(X_i-\mu\right)\left(X_j-\mu\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Cov\left(X_i,X_j\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V\left(X_i\right)=\frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}$$

Then

$$E\left(S_n^2\right)=\frac{1}{n-1}\left\{n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\right\}=\frac{1}{n-1}\left(n-1\right)\sigma^2=\sigma^2.$$

4. *Sea*

$$f_{X,Y}\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(x+y\right) & 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Encuentra $V\left(2X-3Y+8\right).$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
V\left(2X-3Y+8\right) &= V\left(2X-3Y\right) \\
&= V\left(2X\right)+V\left(-3Y\right)+2Cov\left(2X,-3Y\right) \\
&= 4V\left(X\right)+9V\left(Y\right)-12Cov\left(X,Y\right).
\end{aligned}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned}
f_X\left(x\right) &= \int f_{X,Y}\left(x,y\right)dy=\int_0^2\frac{1}{3}\left(x+y\right)dy=\frac{1}{3}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(2x+2\right)\quad 0\leq x\leq 1,
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
EX &= \int xf_X\left(x\right)dx=\int_0^1 x\frac{1}{3}\left(2x+2\right)dx=\frac{1}{3}\left[\frac{2x^3}{3}+x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \int x^2f_X\left(x\right)dx=\int_0^1 x^2\frac{1}{3}\left(2x+2\right)dx=\frac{1}{3}\left[\frac{2x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{3}\right)=\frac{14}{12}\frac{1}{3}=\frac{7}{18},
\end{aligned}$$

y por tanto

$$VX=\frac{7}{18}-\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{63-50}{18*9}=\frac{13}{18*9}=8.0247\times 10^{-2}.$$

Para Y,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}(x+y)\,dy = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+y\right) \quad 0 \le y \le 2, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} EY &= \int y f_Y(y)\,dy = \int_0^2 y\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+y\right)dy = \frac{1}{3}\left[\frac{1y^2}{4}+\frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}+\frac{8}{3}\right) = \frac{11}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EY^2 &= \int y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^2 y^2\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+y\right)dy = \frac{1}{3}\left[\frac{1y^3}{6}+\frac{y^4}{4}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}+4\right) = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

y por tanto

$$VY = \frac{16}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = 0{,}283\,95.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} EXY &= \int xy f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^2 \frac{xy}{3}(x+y)\,dxdy \\ &= \frac{1}{3}\int_0^2\left[y\frac{x^3}{3}+y^2\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = \frac{1}{3}\int_0^2\left[y\frac{1}{3}+y^2\frac{1}{2}\right]_0^1 dy \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{y^2}{2}\frac{1}{3}+\frac{y^3}{3}\frac{1}{2}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right] = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= EXY - EXEY \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\frac{11}{9} \\ &= -1.\,234\,6\times 10^{-2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} V(2X-3Y+8) &= 4V(X)+9V(Y)-12Cov(X,Y) \\ &= 4*8.\,024\,7\times 10^{-2}+9*0{,}283\,95-12*\left(-1{,}234\,6\times 10^{-2}\right) \\ &= 3.\,024\,7. \end{aligned}$$

5. *Prueba que*

$$V(Y) = E\left[V(Y|X)\right] + V\left[E(Y|X)\right].$$

Pista. Sea $m = E(Y)$ *y* $g(x) = E(Y|X=x)$, *por lo que* $E(g(X)) = E(Y) = m$. *Ahora escribe*

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y-m)^2 \\ &= E(\{Y-g(X)\}-\{g(X)-m\})^2, \end{aligned}$$

expande el cuadrado del binomio $\{\cdot\} - \{\cdot\}$ *y toma esperanzas de cada término, usando la ley de esperanzas iteradas,* $E[\cdot] = E[E(\cdot|X)]$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y-m)^2 \\ &= E(\{Y-g(X)\} - \{g(X)-m\})^2 \\ &= E\left(\{Y-g(X)\}^2\right) + E\left(\{g(X)-m\}^2\right) - 2E\{Y-g(X)\}\{g(X)-m\}. \end{aligned}$$

Ahora tenemos que

$$E\left(\{Y-g(X)\}^2\right) = E\left[E\left(\{Y-g(X)\}^2|X\right)\right] = E\left[E\left(\{Y-E(Y|X)\}^2|X\right)\right] = E[V(Y|X)],$$

y

$$E\left(\{g(X)-m\}^2\right) = E\left(\{E(Y|X) - E[E(Y|X)]\}^2\right) = V(E(Y|X)).$$

Finalmente

$$\begin{aligned} E\{Y-g(X)\}\{g(X)-m\} &= E[E(\{Y-g(X)\}\{g(X)-m\}|X)] \\ &= E\left[\{g(X)-m\}\underbrace{E(Y-g(X)|X)}_{=E(Y|X)-E(Y|X)=0}\right] \\ &= E[\{g(X)-m\}\cdot 0] = 0. \end{aligned}$$

6. *Usando el mismo procedimiento demuestra que la función de regresión es la que, de entre todas las posibles (funciones* m *de* X*), minimiza la varianza del error de predicción,*

$$g(x) = E[Y|X=x],$$

$$\Rightarrow \; g \text{ minimiza en } m \quad E\left[(Y-m(X))^2\right] = \text{ Varianza del error,}$$

donde

$$E(Y-m(X))^2 = E(\{Y-g(X)\} - (g(X)-m(X)))^2.$$

Procediendo como en el ejercicio anterior,

$$\begin{aligned} E(Y-m(X))^2 &= E(\{Y-g(X)\} - (g(X)-m(X)))^2 \\ &= E\left(\{Y-g(X)\}^2\right) + E\left(\{g(X)-m(X)\}^2\right) - 2E(\{Y-g(X)\}\{g(X)-m(X)\}). \end{aligned}$$

Ahora tenemos que $E\left(\{Y-g(X)\}^2\right)$ no depende de la función m que elijamos, por lo que no se puede cambiar en el problema. Por otro lado $E\left(\{g(X)-m(X)\}^2\right)$ se hace mínima (igual a cero) si elegimos $m(x) = g(x) = E[Y|X=x]$, mientras que

$$\begin{aligned} E(\{Y-g(X)\}\{g(X)-m(X)\}) &= E[E(\{Y-g(X)\}\{g(X)-m(X)\}|X)] \quad \text{por la LEI} \\ &= E[\{g(X)-m(X)\}E(Y-g(X)|X)] \\ &= E[\{g(X)-m(X)\}0] = 0. \end{aligned}$$

Por tanto el único término que se puede minimizar es el segundo, y la solución es tomar $m(x) = g(x) = E[Y|X=x]$.

7. *Suponga que* $E(Y|X) = X$. *Demuestra que* $Cov(Y, X) = V(X)$.

Primero tenemos por la ley de esperanzas iteradas que $EY = E[E(Y|X)] = EX$,

$$\begin{aligned}
Cov(Y, X) &= E[(X - EX)(Y - EY)] \\
&= E[E\{(X - EX)(Y - EY)|X\}] \quad \text{por la LEI} \\
&= E[(X - EX)E\{(Y - EY)|X\}] \\
&= E[(X - EX)\{E[Y|X] - EY\}] \\
&= E[(X - EX)\{X - EX\}], \quad \text{porque } E(Y|X) = X \text{ y } EY = EX \\
&= E\left[(X - EX)^2\right] = V(X).
\end{aligned}$$