

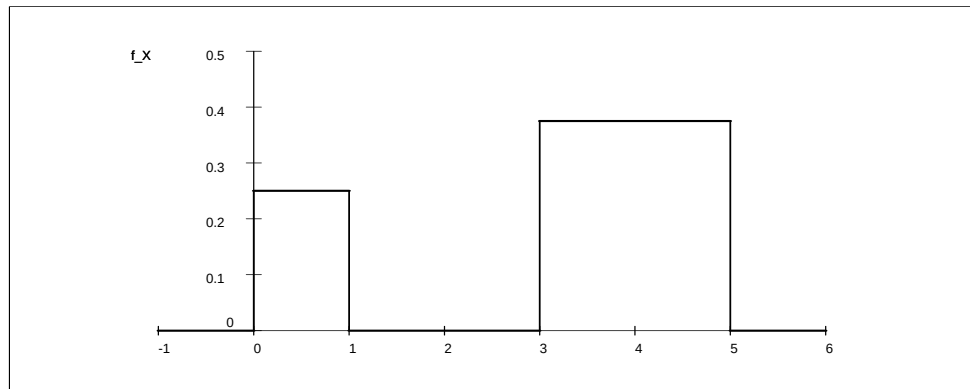
Soluciones Hoja de Ejercicios 2

Estadística

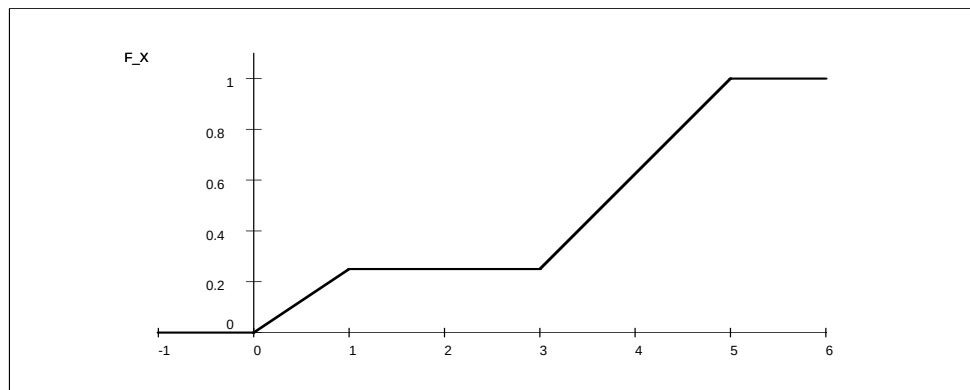
1. Sea X una VA con función de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 < x < 1 \\ 3/8 & 3 < x < 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- a) Encuentra la función de distribución de probabilidad acumulada, CDF, de X .



$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \\ &= 0, \quad x \leq 0 \\ &= \int_0^x \frac{1}{4} dt = \frac{x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1; \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} dt = \Pr(X \leq 1) = \frac{1}{4}, \quad 1 \leq x \leq 3; \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} dt + \int_3^x \frac{3}{8} dt = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}(x-3), \quad 3 \leq x \leq 5; \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} dt + \int_3^5 \frac{3}{8} dt = \frac{1}{4} + \frac{6}{8} = 1, \quad x \geq 5 \end{aligned}$$



- b) Sea $Y = 1/X$. Encuentra la función de distribución y la función de densidad de probabilidad f_Y de Y .

Pista: considera separadamente los casos $\frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leq y \leq 1$, y $y \geq 1$. [Wa.2.4]

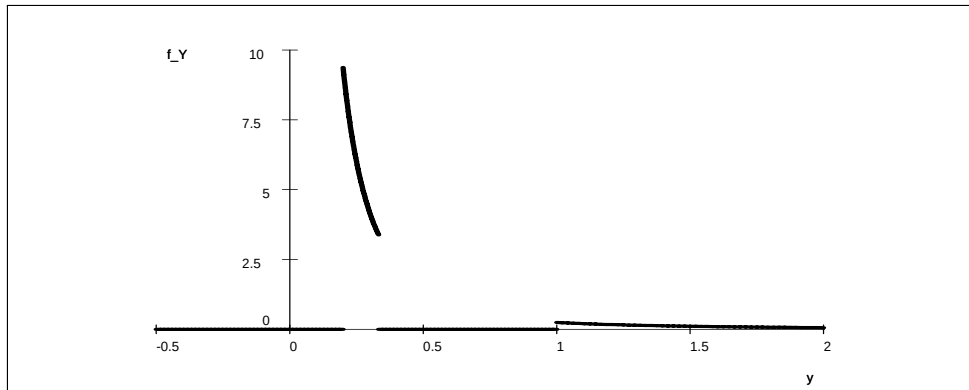
$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(1/X \leq y) = \Pr(X \geq 1/y) = 1 - F_X(1/y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{y} - 3 \right), \quad \frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{3}; \\ &= 1 - \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3} \leq y \leq 1; \\ &= 1 - \frac{1}{4y}, \quad y \geq 1 \end{aligned}$$

y derivando

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{3}{8} \frac{1}{y^2}, \quad \frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{3}; \\ &= 0, \quad \frac{1}{3} \leq y \leq 1; y \leq \frac{1}{5}; \\ &= \frac{1}{4y^2}, \quad y \geq 1 \end{aligned}$$



2. Sea X e Y independientes. Demuestra que $g(X)$ es independiente de $h(Y)$ donde g y h son funciones.

$$\begin{aligned} F_{g(X),h(Y)}(r,s) &= \Pr(g(X) \leq r, h(Y) \leq s) \\ &= \Pr(X \in (x : g(x) \leq r) \cap Y \in (y : h(y) \leq s)) \\ &= \Pr(X \in (x : g(x) \leq r)) \Pr(Y \in (y : h(y) \leq s)) \\ &= \Pr(g(X) \leq r) \Pr(h(Y) \leq s) \\ &= F_{h(Y)}(r) F_{g(X)}(s) \end{aligned}$$

3. Sea $X \sim N(0,1)$ y $Y = e^X$. Encuentra la PDF de Y y dibújala. La distribución de Y se denomina log-normal por que $\log Y = X \sim N(0,1)$. [Wa.2.13]

$Y = e^X$ es monótona creciente, por lo que

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \frac{dx}{dy}$$

donde

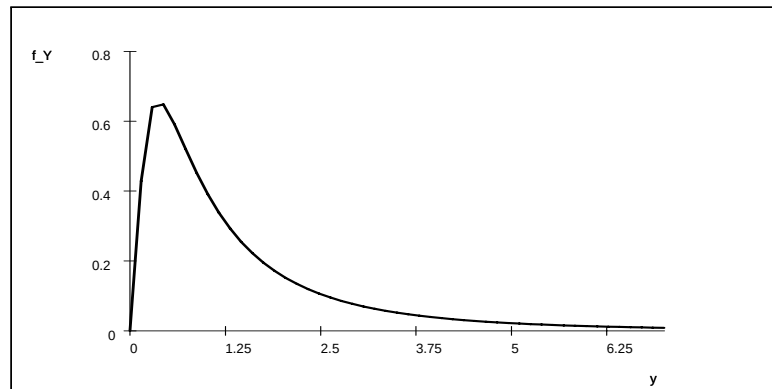
$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

y $X = \log Y$, por lo que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

con lo que

$$f_Y(y) = \frac{1}{y(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\log y)^2\right)$$



4. Sea

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Encuentra $\Pr\left(X \leq \frac{1}{2} | Y = \frac{1}{2}\right)$. [Wa.2.17]

$$f_X\left(x | Y = \frac{1}{2}\right) = \frac{f_{X,Y}\left(x, \frac{1}{2}\right)}{f_Y\left(\frac{1}{2}\right)}$$

donde

$$f_{X,Y}\left(x, \frac{1}{2}\right) = 6\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

porque

$$\begin{aligned} \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 c(x+y^2) dx dy \\ &= c \int_{x=0}^1 x dx + c \int_{y=0}^1 y^2 dy \\ &= c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5c}{6} \end{aligned}$$

por lo que $c = 6/5$ y

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x, \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{6}{5} \int_{x=0}^1 (x+y^2) dx \\ &= \frac{6}{5} \left(\frac{x^2}{2} + y^2 x\right)_{x=0}^1 \\ &= \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2} + y^2\right). \end{aligned}$$

Entonces

$$f_X \left(x | Y = \frac{1}{2} \right) = \frac{\frac{6}{5} \left(x + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right)}{\frac{6}{5} \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right)} = \frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{4} \right), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Pr \left(X \leq \frac{1}{2} | Y = \frac{1}{2} \right) &= \int_{x=-\infty}^{0,5} f_X \left(x | Y = \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{0,5} \frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x \right)_0^{0,5} \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{0,5^2}{2} + \frac{1}{4}0,5 \right) \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

5. Sea $X \sim N(3, 16)$. Usa una tabla de la Normal estándar y un ordenador para obtener:

a) $\Pr(X < 7)$.

$$\begin{aligned} \Pr(X < 7) &= \Pr \left(\frac{X - 3}{4} < \frac{7 - 3}{4} \right) \\ &= \Pr(Z < 1) \\ &= \Phi(1) = 0,8413. \end{aligned}$$

b) $\Pr(X > -2)$.

$$\begin{aligned} \Pr(X > -2) &= 1 - \Pr \left(Z \leq \frac{-2 - 3}{4} \right) \\ &= 1 - \Pr(Z \leq -1,2) \\ &= 1 - \Pr(Z > 1,2) \\ &= 1 - \{1 - \Pr(Z \leq 1,2)\} \\ &= \Pr(Z \leq 1,2) \\ &= \Phi(1,2) = 0,8849. \end{aligned}$$

c) Encontrar x tal que $\Pr(X > x) = 0,05$.

$$\begin{aligned} 0,05 &= \Pr(X > x) \\ &= \Pr \left(Z > \frac{x - 3}{4} \right) \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{x - 3}{4} \right) \end{aligned}$$

es decir,

$$\Phi \left(\frac{x - 3}{4} \right) = 0,95$$

y por lo tanto

$$\frac{x - 3}{4} = 1,6449 \Rightarrow x = 3 + 1,6449 \cdot 4 = 9,5796.$$

d) $\Pr(0 \leq X < 4)$.

$$\begin{aligned}
 \Pr(0 \leq X < 4) &= \Pr\left(\frac{0-3}{4} \leq Z < \frac{4-3}{4}\right) \\
 &= \Pr(-0,75 \leq Z < 0,25) \\
 &= 1 - \Pr(0,75 \leq Z) - \Pr(Z > 0,25) \\
 &= 1 - \{1 - \Phi(0,75)\} - \{1 - \Phi(0,25)\} \\
 &= \Phi(0,75) + \Phi(0,25) - 1 \\
 &= 0,7734 + 0,5987 - 1 \\
 &= 0,3721.
 \end{aligned}$$

e) Encontrar x tal que $\Pr(|X| > |x|) = 0,05$. [Wa.2.18]

$$\begin{aligned}
 \Pr(|X| > |x|) &= 1 - \Pr(-|x| \leq X \leq |x|) \\
 &= 1 - \Pr\left(\frac{-|x|-3}{4} \leq Z \leq \frac{|x|-3}{4}\right) \\
 &= 1 - \left\{ \Phi\left(\frac{|x|-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-|x|-3}{4}\right) \right\} \\
 &= 1 - \left\{ \Phi\left(\frac{|x|-3}{4}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{|x|+3}{4}\right) \right\} \\
 &= \Phi\left(\frac{|x|+3}{4}\right) + \Phi\left(\frac{|x|-3}{4}\right) \\
 &= 0,05
 \end{aligned}$$

por lo que

$$\Phi\left(\frac{|x|-3}{4}\right) \approx 0,05,$$

ya que $\Phi\left(\frac{|x|+3}{4}\right) \approx 0$, por lo que

$$\frac{|x|-3}{4} = 1,6449 \Rightarrow |x| = 3 + 1,6449 * 4 \approx 9,5796.$$