Soluciones Hoja de Ejercicios 1

Estadística

1. *Se dispone de tres cartas, la primera tiene ambos lados verdes, la segunda tiene ambos lados rojos y la tercera tiene un lado de cada color. Se elige una carta al azar, y se ve un lado de la carta (aleatoriamente). Si el lado que vemos es verde, ¿cuál es la probabilidad de que el otro lado es también verde? [Wa.1.12]*

   a) Llamamos a las 3 cartas VV, RR y RV y sus caras respectivas son V_1, V_2, R_1, R_2, R_3, y V_3, las cuales son equiprobables. Entonces

$$\begin{aligned}\Pr(\text{debajo verde}|\text{ arriba verde}) &= \frac{\Pr(\text{debajo verde } \cap \text{ arriba verde})}{\Pr(\text{arriba verde})}\\ &= \frac{\Pr(\mathrm{V}_1\mathrm{V}_2 \cup \mathrm{V}_2\mathrm{V}_1)}{\Pr(\mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2 \cup \mathrm{V}_3)}\\ &= \frac{2\frac{1}{6}}{3\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

   Una vez que sacamos una cara verde (con igual probabilidad, V_1, V_2 ó V_3), el otro lado es, con igual probabilidad, V_2, V_1 ó R_3, dos casos favorables, de tres posibles.

2. *La probabilidad de que un niño tenga ojos azules es de* $1/4$. *Asumamos independencia entre niños. Considera una familia con 3 niños.*

   a) *Si se sabe que al menos un niño tiene ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos niños tengan ojos azules?*

   Se define $A_i = \{$ al menos i niños tienen los ojos azules$\}$

$$\begin{aligned}\Pr(A_2|A_1) &= \frac{\Pr(A_2 \cap A_1)}{\Pr(A_1)} = \frac{\Pr(A_2)}{\Pr(A_1)} = \frac{\Pr(2 \text{ niños ojos az } \cup \text{ } 3 \text{ niños ojos az})}{1-\Pr(\text{ninguno azul})}\\ &= \frac{3\,(1/4)^2\,(3/4)+(1/4)^3}{1-(3/4)^3} = \frac{9+1}{4^3-27} = \frac{10}{37} \approx 0{,}270\,27.\end{aligned}$$

   b) *Si se sabe que el niño más joven tiene ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos niños tengan ojos azules? [Wa.1.15]*

   Sea 1_A si el pequeño tiene ojos azules, 2_A si el segundo los tiene azules, etc. y $1_{\bar{A}}$ si el primero no los tiene azules, etc. Entonces

$$\begin{aligned}\Pr(A_2|1_A) &= \frac{\Pr(A_2 \cap 1_A)}{\Pr(1_A)} = \frac{\Pr(1_A 2_A 3_{\bar{A}} \cup 1_A 2_{\bar{A}} 3_A \cup 1_A 2_A 3_A)}{1/4}\\ &= \frac{\Pr(1_A 2_A 3_{\bar{A}}) + \Pr(1_A 2_{\bar{A}} 3_A) + \Pr(1_A 2_A 3_A)}{1/4}\\ &= \frac{2\,(1/4)^2\,(3/4)+(1/4)^3}{1/4} = \frac{\frac{6+1}{4^3}}{1/4} = \frac{7}{16} \approx 0{,}437\,5.\end{aligned}$$

   En este caso eliminamos en la condición la posibilidad de que $1_{\bar{A}} 2_A 3_{\bar{A}}$ ó $1_{\bar{A}} 2_{\bar{A}} 3_A$ ó $1_{\bar{A}} 2_A 3_A$ y arriba sólo la posibilidad $1_{\bar{A}} 2_A 3_A$.

3. *Suponga que el 30 % de los ordenadores son Macintosh, 50 % usan Windows y un 20 % usa Linux. El 65 % de los usuarios de Mac han sido infectados por un virus, el 82 % de los usuarios de Windows y el 50 % de los de Linux. Se selecciona una persona al azar y su encuentra que su sistema está infectado con un virus. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un usuario de Windows? [Wa.1.19]*

$$\begin{aligned}
\Pr(W|\text{ virus}) &= \frac{\Pr(W \cap \text{virus})}{\Pr(\text{virus})} \\
&= \frac{\Pr(\text{virus|W})\Pr(W)}{\Pr(\text{virus|W})\Pr(W) + \Pr(\text{virus|L})\Pr(L) + \Pr(\text{virus|M})\Pr(M)} \\
&= \frac{0{,}82 * 0{,}5}{0{,}82 * 0{,}5 + 0{,}50 * 0{,}2 + 0{,}65 * 0{,}3} \approx ,582
\end{aligned}$$

4. *Ejercicio de Ordenador [Opcional]. Suponga que una moneda tiene una probabilidad p de salir cara. Si tiramos la moneda muchas veces, esperaríamos que la proporción de caras estuviese cercana a p. Toma $p = 0{,}3$ y $n = 1,000$ y simula n tiradas de la moneda. Dibuja la proporción de caras como una función de n (intenta diferentes $n's$, 10, 100, etc.) Repite el experimento para $p = 0{,}03$. [Wa.1.21]*

n	10	100	500	1000	1500	2000	2500	3000
$\hat{p}$	0,2	0,39	0,28	0,307	0,314	0,3125	0,2936	0,3177

n	10	100	500	1000	1500	2000	2500	3000
$\hat{p}$	0	0,03	0,04	0,027	0,0333	0,0305	0,0256	0,03067