Hoja de Ejercicios 5

Estadística

1. Sean $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de VAs. Demuestra que $X_n \to_2 b$ si y sólo si
$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = b \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} V(X_n) = 0.$$

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ IID con media $\mu = EX_1$ y varianza $\sigma^2 = V(X_1)$. Sea $\bar{X}_n$ la media muestral. Demuestra que $\bar{X}_n \to_2 \mu$.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ IID con media $\mu = EX_1$ y varianza $\sigma^2 = V(X_1)$. Sea $\bar{X}_n$ la media muestral y sea S_n^2 la varianza muestral.

   a) Ya sabemos que $ES_n^2 = \sigma^2$. ¿Entonces podemos concluir que $S_n^2 \to_p \sigma^2$ y/o $S_n^2 \to_2 \sigma^2$? ¿Qué nos faltaría? Razona tu respuesta.

   b) Alternativamente, escribe
$$S_n^2 = c_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - d_n \bar{X}_n^2$$
   y demuestra que $c_n \to 1$ y que $d_n \to 1$. Entonces aplica la LGN a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ y a $\bar{X}_n$. Luego utiliza las propiedades de $\to_p$ para encontrar el $p\lim$ de S_n^2.

4. Suponga que $\Pr(X=1) = \Pr(X=-1) = 1/2$. Define
$$X_n = \begin{cases} X & \text{con probabilidad } 1 - \frac{1}{n} \\ e^n & \text{con probabilidad } \frac{1}{n}. \end{cases}$$
   ¿Converge X_n a X en probabilidad? ¿Converge X_n a X en distribución? ¿Converge $E(X_n - X)^2$ a cero?

5. Suponga que $X_n \sim N = (0, 1/n)$ y sea X una VA con distribución $F(x) = 0$ si $x < 0$ and $F(x) = 1$ si $x \geq 0$. ¿Converge X_n a X en probabilidad? ¿Converge X_n a X en distribución?

6. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vectores aleatorios IID con
$$X_i = \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \end{pmatrix}$$
   con media
$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EX_{1i} \\ EX_{2i} \end{pmatrix}$$
   y matriz de varianzas-covarianzas Σ. Sean
$$\bar{X}_{1n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \quad \text{y} \quad \bar{X}_{2n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$
   y define $Y_n = \bar{X}_{1n}/\bar{X}_{2n}$. Encuentra la distribución límite de Y_n.