# Hoja de Ejercicios 3

## Estadística

1. Demuestra que $V(X) = 0$ si y sólo si hay una constante $c$ tal que $\Pr(X = c) = 1$.

2. Demuestra que el valor esperado de una VA $B(n, p)$ es $np$ y su varianza es $np(1 - p)$.

3. Demuestra que $E\left(S_n^2\right) = \sigma^2$ si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra IID.

4. Sea
$$f_{X,Y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{13}(x + y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$
Encuentra $V(2X - 3Y + 8)$.

5. Prueba que
$$V(Y) = E[V(Y|X)] + V[E(Y|X)].$$
Pista. Sea $m = E(Y)$ y $g(x) = E(Y|X = x)$, por lo que $E(g(X)) = E(Y) = m$. Ahora escribe
$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y - m)^2 \\ &= E(\{Y - g(X)\} - \{g(X) - m\})^2, \end{aligned}$$
expande el cuadrado del binomio $\{\cdot\} - \{\cdot\}$ y toma esperanzas de cada término, usando la ley de esperanzas iteradas, $E[\cdot] = E[E(\cdot|X)]$.

6. Usando el mismo procedimiento demuestra que la función de regresión es la que, de entre todas las posibles (funciones $m$ de $X$), minimiza la varianza del error de predicción,
$$g(x) = E[Y|X = x],$$
$$\Rightarrow \quad g \ \text{ minimiza en } m \quad E\left[(Y - m(X))^2\right] = \text{ Varianza del error,}$$
donde
$$E(Y - m(X))^2 = E(\{Y - g(X)\} - (g(X) - m(X)))^2.$$

7. Suponga que $E(Y|X) = X$. Demuestra que $Cov(Y, X) = V(X)$.