

Soluciones Hoja de Ejercicios 1

Econometría I

1. Si $Y = X'\beta + U$, donde β es un parámetro, responde Verdadero o Falso, justificando la respuesta:

- a) Si $E[U|X] = 0$, entonces $E[X^2U] = 0$.

Verdadero porque

$$E[X^2U] = E[E[X^2U|X]] = E\left[X^2 \underbrace{E[U|X]}_{=0}\right] = E[0] = 0.$$

- b) Si $E[UX] = 0$, entonces $E[U|X] = 0$.

Falso. Contraejemplo: toma $U = X^2$, con X de media cero y con distribución simétrica, $E[X^3] = 0$, pero $E[U|X] = E[X^2|X] = X^2$.

- c) Si $E[UX] = 0$, entonces $E[X^2U] = 0$.

Falso. Contraejemplo: toma $U = X^2$, con X de media cero, varianza positiva y con distribución simétrica, $E[UX] = E[X^3] = 0$, pero $E[X^2U] = E[X^4] > 0$.

- d) Si $E[U|X] = 0$, entonces U es independiente de X .

Falso. Contraejemplo: si $E[U^2|X] = \sigma^2(X)$ no constante, entonces U no es independiente de X .

- e) Si $E[U|X] = 0$ y $E[U^2|X] = \sigma^2$, constante, entonces U es independiente de X .

Falso, por ejemplo, los momentos condicionales de mayor orden pueden depender de X , por lo que la distribución de U no sería independiente de X .

2. Considera una v.a. discreta Y que toma valores enteros no negativos entre 0 y $m > 0$. La distribución condicional de Y dado X es Binomial,

$$\Pr\{Y = k|X = x\} = \binom{m}{k} (x'\beta)^k (1 - x'\beta)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

- a) Computar $E[Y|X = x]$ y $\text{Var}[Y|X = x]$.

La distribución condicional de Y dada $X = x$ es Binomial $(m, x'\beta)$ (asumiendo que $x'\beta \in [0, 1]$) por lo que

$$\begin{aligned} E[Y|X = x] &= mp = m(x'\beta) \\ \text{Var}[Y|X = x] &= mp(1 - p) = m(x'\beta)(1 - x'\beta) \end{aligned}$$

Como $E[Y|X = x] = m(x'\beta)$ es lineal en x , entonces $E[Y|X = x] = m(x'\beta)$.

- b) ¿Cuáles son las propiedades de U en el modelo lineal $Y = X'(\beta m) + U$?

Dada $X = x$ la distribución de $U = Y - x'\beta m$ tendría estas propiedades,

$$\begin{aligned} E[U|X = x] &= E[Y|X = x] - x'\beta m = m(x'\beta) - x'\beta m = 0; \\ \text{Var}[U|X = x] &= \text{Var}[Y|X = x] = m(x'\beta)(1 - x'\beta). \end{aligned}$$

¿Es U independiente de X ?

No, por ejemplo la varianza condicional $\text{Var}[Y|X=x]$ depende de x incluso cuando $m=1$ en el que $E[U|X=x]=0$.

¿Puede ser la distribución condicional de U dada X normal?

No, porque dado $X=x$, Y tiene una distribución discreta, y por tanto no puede tener una distribución continua como la normal.

3. Suponga que la función de probabilidad conjunta de Y y X es

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0,3	0	0,1
1	0	0,2	0
2	0,3	0	0,1

Calcule la correlación entre Y y X y la función de regresión $E[Y|X]$. ¿Son Y y X independientes?

$Y \backslash X$	0	1	2	
0	0,3	0	0,1	0,4
1	0	0,2	0	0,2
2	0,3	0	0,1	0,4
	0,6	0,2	0,2	

$$E[Y] = 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 = 1$$

$$E[X] = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2 = 0,6$$

$$E[Y^2] = 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,4 = 1,8$$

$$E[X^2] = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,2 = 1$$

$$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = 1,8 - 1^2 = 0,8$$

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 1 - 0,6^2 = 0,64$$

$$E[XY] = 1 \cdot 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 2 \cdot 0,1 = 0,6$$

$$C[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0,6 - 1 \cdot 0,6 = 0$$

$$\rho_{YX} = \frac{C[X, Y]}{\sqrt{V[Y]V[X]}} = 0.$$

$$E[Y|X=0] = \frac{1}{0,6} \{0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0,3\} = 1 = E[Y]$$

$$E[Y|X=1] = \frac{1}{0,2} \{0 \cdot 0 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0\} = 1 = E[Y]$$

$$E[Y|X=2] = \frac{1}{0,2} \{0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0,1\} = 1 = E[Y]$$

Y y X no son independientes, pero dada X , Y tiene función de regresión igual a una constante, $E[Y]$.

4. Si X e Y no son independientes y la esperanza condicional de Y dado X es diferente para todos los posibles valores de X , ¿es todavía posible que $C[Y, X] = 0$?

Sí, porque independencia lineal no implica independencia ni independencia en media.