

# ECONOMETRIA I

Curso 1999/2000

## Problema de Restricciones Lineales para el Examen Final (se necesita una tabla de Chi-cuadrada)

Un estudio sobre el consumo de teléfono móvil en 50 países estima la siguiente ecuación de demanda

$$\widehat{\log C} = -4,24 - 1,01 \log P_m + 0,57 \log P_f + 0,19 \log P_b + 0,94 \log M$$
$$R^2 = 0,82 \quad \hat{u}'\hat{u} = 9,01$$

donde  $C$  es el consumo en horas de llamadas con un teléfono móvil,  $P_m$  es el precio de una hora de llamadas con un teléfono móvil,  $P_f$  es el precio de una hora de llamadas con un teléfono fijo,  $P_b$  es el precio de otros bienes de consumo y  $M$  es la renta. De la matriz de diseño  $X$  se sabe

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 70,05 & & & & \\ 3,15 & 0,28 & & & \\ 2,30 & 0,22 & 0,11 & & \\ 0,65 & 0,05 & ? & 0,03 & \\ -0,26 & -0,28 & -1,00 & -0,05 & 0,85 \end{pmatrix}$$

1. Calcule un 95% intervalo de confianza para la elasticidad-renta.
2. Se supone que en el futuro ambos  $P_m$  y  $P_f$  van a bajar. Contraste la hipótesis de que si  $P_f$  baja tres veces más que  $P_m$  pero las otras variables no cambian, entonces la cantidad demandada no debería variar. Utilice el nivel de significación  $\alpha = 0,1$ .
3. Según una nueva teoría económica las elasticidades-precio para las llamadas de teléfono fijo y para el resto de los bienes deberían ser iguales y además la elasticidad-renta debería ser igual a uno. Tomando en cuenta estas restricciones se estima el siguiente modelo::

$$\widehat{\log C} = -6,42 - 1,25 \log P_m + 0,38(\log P_f + \log P_b) + \log M$$
$$\tilde{R}^2 = 0,778 \quad \tilde{u}'\tilde{u} = 11,10$$

Contraste la veracidad de dicha nueva teoría económica. Utilice el nivel de significación  $\alpha = 0,05$ .

## SOLUCION

1. El estadístico  $t = \frac{0,94-1}{\sqrt{\frac{9,01}{45} \cdot 0,85}} = -0,145$  que es menor en valor absoluto que  $t_{45;0,025} = 1,96$  lo que nos lleva a no rechazar la  $H_0$  al 5%.
2. El estadístico de contraste es  $(-1,01 + 3 * 0,57) / \sqrt{9,01/45 * (0,28 + 6 * 0,22 + 9 * 0,11)} = 0,972$  y se acepta la hipótesis nula.

3. El estadístico de contraste es  $(11.1 - 9.01) \cdot (45) / (9.01 \cdot 2) = 5.22$  y no se rechaza la hipótesis nula puesto que el 0.95 cuantil de  $\chi^2(2)$  es 5.99. Nota: también se puede utilizar el estadístico de contraste equivalente  $(0.82 - 0.778) \cdot 45 / ((1 - 0.82) \cdot 2) = 5.25$  (el error pequeño se debe al redondear).

## PROBLEMA 2

Suponga que deseamos estimar una función de producción, para lo que disponemos de una muestra aleatoria de empresas manufactureras de las que observamos el nivel de producción ( $Y_i$ ), el stock de capital ( $K_i$ ) y el nivel de empleo ( $L_i$ ). Para ello, se estima el siguiente modelo:

$$\ln Y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln K_i + \beta_3 \ln L_i + \beta_4 [\ln(K_i/L_i)]^2 + v_i \quad (\text{CES})$$

que representa una aproximación lineal a la función CES  $Y_i = \gamma [\delta K_i^\rho + (1 - \delta)L_i^\rho]^{\nu/\rho}$

(a) ¿Cuál es la elasticidad del output con respecto al capital?

$$\frac{\partial \ln Y_i}{\partial \ln K_i} = \beta_2 + 2\beta_4 \ln(K_i/L_i)$$

(b) Considere la tecnología Cobb-Douglas, donde  $Y_i = AK_i^{\alpha_2} L_i^{\alpha_3} \exp(u_i)$ . ¿Cómo podría contrastar la especificación CES frente a la Cobb-Douglas? ¿Cómo contrastaría la hipótesis de rendimientos constantes a escala? Justifique la respuesta.

La especificación Cobb-Douglas puede expresarse, tomando logaritmos, como

$$\ln Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 \ln K_i + \alpha_3 \ln L_i + u_i, \quad (\text{C-D})$$

de manera que la especificación Cobb-Douglas es un caso particular de la CES, donde  $\alpha_j = \beta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\beta_4 = 0$ . Por tanto, la especificación CES verifica las restricciones de la Cobb-Douglas cuando se verifica la hipótesis nula

$$H_0 : \beta_4 = 0.$$

Existen dos maneras de contrastar dicha hipótesis:

(i) Estimando la ecuación irrestringida (1) y contrastando  $H_0$  mediante el estadístico  $t$  asociado a  $\hat{\beta}_4$ :

$$t = \frac{\hat{\beta}_4}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_4)}} \sim_A N(0, 1) \text{ bajo } H_0$$

o, suponiendo normalidad de los errores, dicho estadístico tendría una distribución  $t$  de Student con  $n - k$  grados de libertad, donde  $k$  es el número de variables explicativas.

(ii) Estimando la ecuación irrestringida (1) y la restringida (1) y contrastando  $H_0$  mediante el estadístico

$$W = n \frac{\hat{u}'_* \hat{u}_* - \hat{u}' \hat{u}}{\hat{u}' \hat{u}} \sim_A \chi^2_1 \text{ bajo } H_0$$

donde  $\hat{u}' \hat{u}$  es la suma de los cuadrados de los residuos MCO del modelo irrestringido (1),  $\hat{u}'_* \hat{u}_*$  es la suma de los cuadrados de los residuos del modelo restringido (1). Dado que las restricciones bajo  $H_0$  no alteran la variable dependiente, este estadístico puede expresarse también, definiendo  $R^2$ ,  $R_*^2$  como los coeficientes de determinación de los modelos irrestringido y restringido, respectivamente, como

$$W = \frac{R^2 - R_*^2}{1 - R^2}.$$

Suponiendo normalidad de los errores, este estadístico se distribuye como una  $F_{1, n-k}$ .

- (c) En el caso de la tecnología Cobb-Douglas, suponga que el capital está medido con error, de manera que observamos  $\ln \tilde{K}_i = \ln K_i + e_i$ . ¿Cómo afectaría el error de medida en el capital a la estimación MCO del coeficiente del capital? Justifique la respuesta.

Si el capital está medido con error, la estimación MCO de su coeficiente asociado va a ser inconsistente al ser el capital observado una variable endógena. La razón es que, al existir error de medida, la condición de ausencia de correlación entre el término de error y las variables explicativas no se verifica. La ecuación (1) puede expresarse, en términos de las variables observadas, como

$$\ln Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 \ln \tilde{K}_i + \alpha_3 \ln L_i + \varepsilon_i,$$

donde  $\varepsilon_i = u_i - e_i$ . Es fácil ver que  $E[(\ln \tilde{K}_i)\varepsilon_i] = E[(\ln \tilde{K}_i)(u_i - e_i)] = E[(\ln K_i + e_i)(u_i - e_i)] \neq 0$ .

- (d) Suponga que la función de producción está apropiadamente representada por la tecnología Cobb-Douglas, pero no se dispone de datos sobre el stock de capital. Teniendo en cuenta que el número de empleados es en promedio mayor cuanto mayor es el stock de capital, ¿cuál sería el efecto sobre la estimación MCO de la elasticidad del trabajo de omitir el stock de capital en la estimación?

Al omitir una variable relevante ( $\alpha_2 > 0$ ) correlacionada con la variable explicativa que se incluye en el modelo ( $cov(\ln K_i, \ln L_i) > 0$ ), obtendremos una estimación inconsistente de  $\alpha_3$ , dado que se invalida la condición de no correlación entre los regresores y el término de error. Además, el sesgo de inconsistencia de  $\hat{\alpha}_3$  será positivo, al ser tanto  $\alpha_2$  como  $cov(\ln K_i, \ln L_i)$  positivos.

## PROBLEMA 3

El modelo que se quiere validar es el siguiente:

$$y_i = \beta_0 + \delta_0 D_{1i} + \beta_1 X_{1i} + \gamma_2 X_{2i} D_{1i} + \beta_2 X_{2i} D_{2i} + u_i \quad i = 1, \dots, n$$

es decir,

$$y_i = \beta_0 + \delta_0 + \beta_1 X_{1i} + \gamma_2 X_{2i} + u_i \quad D_{1i} = 1 \quad (\text{área urbana})$$

y

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i \quad D_{2i} = 1 \quad (\text{área rural})$$

- a)  $H_0 : \delta_0 = 0$  (contraste de significación)

En Tabla 5: t-ratio=0.237 y p-valor=0.8169, es decir, no se puede rechazar  $H_0$  para ningún nivel razonable de significación (1%, 5%, 10%, etc.)

- b)  $H_0 : \beta_2 - \gamma_2 = 0$  (contraste de Wald)

Estadístico:

$$\varepsilon_W = \frac{n-5}{1} \times \frac{R^2 - R_*^2}{1 - R^2} = \frac{15-5}{1} \times \left( \frac{0.7964 - 0.7920}{1 - 0.7964} \right) = 0.2161$$

donde

$$R^2 = 0.7964 \quad (\text{Tabla 5})$$

$$R_*^2 = 0.7920 \quad (\text{Tabla 2 y Tabla 3})$$

Alternativamente el estadístico de Wald puede expresarse como

$$\varepsilon_W = \frac{n-5}{1} \times \frac{\tilde{U}'\tilde{U} - \hat{U}'\hat{U}}{\hat{U}'\hat{U}} = \frac{15-5}{1} \times \left( \frac{13804.69 - 13510.03}{13510.03} \right) = 0.2181$$

donde

$$\hat{U}'\hat{U} = 13510.03 \quad (\text{Tabla 5})$$

$$\tilde{U}'\tilde{U} = 13804.69 \quad (\text{Tabla 3})$$

En muestras pequeñas ( $n \leq 30$ )

$$\varepsilon_W \sim F_{1,n-5}$$

$RC = (4, 96; \infty)$  Por tanto, no se rechaza la  $H_0$  ya que  $\varepsilon_W = 0.21 \notin RC$ .

En muestras grandes ( $n > 30$ )

$$\varepsilon_W \sim \chi_1^2 \equiv N(0,1)^2$$

c)

c) Los modelos que se estiman en las tablas 2 y 3 son equivalentes

Tabla 2

$$y_i = \gamma_0 D_{1i} + \beta_0 D_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Tabla 3

$$y_i = \gamma_0 + \delta_0 D_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

Reemplazando  $D_{1i} = 1 - D_{2i}$  en la Ecuación (1) se tiene que

$$y_i = \gamma_0(1 - D_{2i}) + \beta_0 D_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_i = \gamma_0 + (\beta_0 - \gamma_0) D_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_i = \gamma_0 + \delta_0 D_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i \quad i = 1, \dots, n$$

que coincide con la expresión dada en la Ecuación (2).