

Soluciones al examen de Econometría I (2ª Convocatoria)
Universidad Carlos III de Madrid
Curso 2001/2002

SOLUCIÓN A LA PREGUNTA 1:

$$E(Y|X_2) = 1 + E(X_1|X_2) + X_2 = 1 + (1 + X_2) + X_2 = 2 + 2X_2.$$

Como $E(Y|X_2) = 2 + 2X_2$ es lineal, $PLO(Y|X_2) = E(Y|X_2) = 2 + 2X_2, \implies \delta_1 = 2$.

SOLUCIÓN A LA PREGUNTA 2:

$$\delta_1 = \frac{C(Y, X_2)}{V(X_2)} = \frac{E(YX_2) - E(Y)E(X_2)}{V(X_2)} = 0$$

SOLUCIÓN A LA PREGUNTA 3:

a $V(\varepsilon|X_1, X_2) = V(U|X_1, X_2) = X_1^2 V(U|X_1, X_2) = X_1^2 E(U^2|X_1, X_2) = X_1^2$.

b El estimador GLS es el el estimador MCO en el modelo transformado:

$$\frac{Y}{|X_1|} = \frac{1}{|X_1|}\beta_0 + \underbrace{\frac{X_1}{|X_1|}}_{\text{sign}(X_1)}\beta_1 + \frac{X_2}{|X_1|}\beta_2 + \text{error}$$

SOLUCIÓN A LA PREGUNTA 4

Para realizar el contraste debemos utilizar la estimación del modelo 3

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 (X_1 \times X_2) + \varepsilon$$

a β_1 representa la elasticidad del gasto en alimentación respecto al gasto total para las familias en las que el marido no tiene estudios universitarios y $\beta_1 + \beta_3$ la de las familias en las que el marido tiene estudios universitarios.

La hipótesis a contrastar será $H_0 : \beta_3 = 0$ versus $H_1 : \beta_3 \neq 0$.

El valor del t-Statistic para el contraste de dicha hipótesis es de -2.067132 con un Prob. (p-value) de 0.0390. La región de rechazo consiste en aquellas muestras que dan lugar a un t-estadístico mayor que 1,96. Podemos, por tanto, rechazar la hipótesis nula.

SOLUCIÓN A LA PREGUNTA 5

a En la REGRESIÓN 1 se presentan los resultados de la estimación por MCO del modelo:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

Debemos contrastar que el modelo es lineal, para lo que consideramos la hipótesis nula: $H_0 : \beta_3 = 0$ versus $H_1 : \beta_3 \neq 0$.

El valor del t-Statistic para el contraste de dicha hipótesis es de -5.428715 con un Prob. (p-value) de 0.0000. La región de rechazo consiste en aquellas muestras que dan lugar a un t-estadístico mayor que 1,96. Podemos, por tanto, rechazar la hipótesis nula.

b La hipótesis nula a contrastar es $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$. Nótese que la REGRESIÓN 2 es la estimación del modelo de la REGRESIÓN 1 tras imponer esta hipótesis. Por tanto, con la información disponible, podemos realizar un contraste basado en el R^2 o en la suma de los cuadrados de los residuos de ambas regresiones. El estadístico del contraste es:

$$W = \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{(1 - R_1^2)} \times (n - K - 1)$$

donde R_1^2 es el coeficiente de determinación de la REGRESIÓN 1 (Modelo sin restringir), R_2^2 es el coeficiente de determinación de la REGRESIÓN 2 (Modelo restringido) y K el número de regresores del modelo no restringido, $K = 3$. Por tanto,

$$W = \frac{(0.263355 - 0.155718)}{(1 - 0.263355)} \times (528 - 3 - 1) = 76.566.$$

Alternativamente:

$$W = \frac{(SR_2 - SR_1)}{SR_1} \times (n - K - 1)$$

donde SR_1 es la suma de cuadrados de los residuos de la REGRESIÓN 1 (Modelo sin restringir), SR_2 es la suma de cuadrados de los residuos de la REGRESIÓN 2 (Modelo restringido) y K el número de regresores del modelo no restringido, $K = 3$. Por tanto,

$$W = \frac{(120.8779 - 105.4673)}{105.4673} \times (528 - 3 - 1) = 76.565$$

Sabemos que,

$$W \underset{aprox}{\sim} \chi_2^2 \text{ bajo } H_0.$$

El valor crítico, al 5% de significación, es 5,99 y la región de rechazo consiste en aquellas muestras que dan lugar a un t-estadístico mayor que 5,99. Por tanto, rechazamos la hipótesis nula.

SOLUCIÓN A LA PREGUNTA 6

a El modelo propuesto es un modelo planteado en términos per-cápita

$$\log(V_i) - \log(NH_i) = \beta_0 + \beta_1[\log(R_i) - \log(NH_i)] + \beta_2[\log(NC_i) - \log(NH_i)] + \varepsilon_i,$$

1.

↓

$$\log(V_i/NH_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(R_i/NH_i) + \beta_2 \log(NC_i/NH_i) + \varepsilon_i,$$

en el que los parámetros β_1 y β_2 son elasticidades. Además, esperamos que $\beta_1 > 0$ y $\beta_2 < 0$.

- Un incremento del 1% en la renta per-cápita de la variable (R_i/NH_i) provoca un incremento medio en las ventas per-cápita (V_i/NH_i) del $\beta_1\%$.
- Un incremento del 1% en el número de establecimientos per-cápita de la competencia (NC_i/NH_i) provoca una reducción media en las ventas per-cápita (V_i/NH_i) del $\beta_2\%$.

b Efectivamente si en el modelo

$$\log(V_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(R_i) + \beta_2 \log(NC_i) + \beta_3 \log(NH_i) + \varepsilon_i,$$

1. se impone la restricción de que la suma de las elasticidades es unitaria ($\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$), se obtiene el modelo propuesto en el ejercicio al sustituir $\beta_3 = 1 - \beta_1 - \beta_2$

$$\log(V_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(R_i) + \beta_2 \log(NC_i) + (1 - \beta_1 - \beta_2) \log(NH_i) + \varepsilon_i,$$

↓

$$\log(V_i) - \log(NH_i) = \beta_0 + \beta_1[\log(R_i) - \log(NH_i)] + \beta_2[\log(NC_i) - \log(NH_i)] + \varepsilon_i,$$

↓

$$\log(V_i/NH_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(R_i/NH_i) + \beta_2 \log(NC_i/NH_i) + \varepsilon_i,$$

c En el modelo

$$\log(V_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(R_i) + \beta_2 \log(NC_i) + \beta_3 \log(NH_i) + \varepsilon_i,$$

1. y a partir de una muestra aleatoria y a partir de estimaciones MCO habría que contrastar $H_0 : \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$ versus $H_0 : \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \neq 1$. Para ello se podrían emplear los siguientes contrastes:

Bajo $H_0 : \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$

- $t = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3}} \underset{aprox}{\sim} N(0, 1).$
- $W = \frac{R_s^2 - R_R^2}{1 - R_s^2} \times (n - 4) \underset{aprox}{\sim} \chi_1^2$ con $R_s^2 =$ coeficiente de determinación del modelo sin restringir y $R_R^2 =$ coeficiente de determinación del modelo restringido (definido sobre las variaciones de $\log(V_i)$).
- $W = \frac{SRR - SRS}{SRS} \times (n - 4) \underset{aprox}{\sim} \chi_1^2$ con $SRS =$ Suma residual del modelo sin restringir y $SRR =$ Suma residual del modelo restringido

SOLUCIÓN A LA PREGUNTA 7 Si las variables explicativas no están correlacionadas con el término de error, el estimador MCO es consistente incluso cuando la variable dependiente está medida con error.

SOLUCIÓN A LA PREGUNTA 8

a Si no se dispone de datos para NC El modelo ajustado será:

$$\log(\widehat{V_i/NH_i}) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \log(R_i/NH_i)$$

1. y se cumplirá que

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}$$

siendo $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ las estimaciones MCO que se obtendrían de haber estimado el modelo de regresión múltiple propuesto y $\hat{\gamma}$ la pendiente estimada por MCO de una regresión lineal entre $\log(NC_i/NH_i)$ y $\log(R_i/NH_i)$ ($\log(\widehat{NC_i/NH_i}) = \hat{\mu} + \hat{\gamma} \log(R_i/NH_i)$). En general se tiene que $\hat{\beta} \neq \hat{\beta}_1$ dado que $\hat{\beta}_2 \neq 0$ y que $\hat{\gamma} \neq 0$.

Además

$$p \lim \hat{\beta} = \beta_1 + \beta_2 \gamma \neq \beta_1 \quad \text{dado que en general } \beta_2 \neq 0 \text{ y que } \gamma \neq 0$$

Así pues, en general para realizar inferencia sobre β_1 no será adecuado emplear $\hat{\beta}$. Sólo si $\beta_2 = 0$ y/o $\gamma = 0$ será adecuado emplear $\hat{\beta}$ para realizar inferencia sobre β_1 .

b Para obtener estimaciones consistentes de β_1 omitiendo en el análisis $\log(NC_i/NH_i)$ habría que estimar mediante Variables Instrumentales el modelo:

$$\log(V_i/NH_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(R_i/NH_i) + U_i,$$

1. Para ello precisamos al menos de una variable Z (instrumento) que verifique:

1º) $C(Z, U) = 0$. Es decir $C(Z, \log(NC/NH)) = 0$ y $C(Z, \varepsilon) = 0$

2º) $C(Z, \log(R/NH)) \neq 0$

Y a partir de una muestra para Z , $\log(V/NH)$ y $\log(R/NH)$ obtener

$$\hat{\beta}_1^{VI} = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}) \log(V_i/NH_i)}{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}) \log(R_i/NH_i)},$$

donde $\bar{Z} = n^{-1} \sum_{i=1}^n Z_i$.