Apellidos:

Nombre:

OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA. EXAMEN JUNIO 2019-20

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x, y) = y - x^3$ y dados los conjuntos $A_a = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, -e^{-x} \leq y \leq 0\}$ se pide:
- (a) (0.4 puntos) Represente las curvas de nivel $c = -1, 0, 1$ de la función f y los conjuntos A_a , para $a = 1, \infty$.
- (b) (0.6 puntos) Calcule, en el caso de que existan, los maximizadores y minimizadores globales de f en los conjuntos A_a .
-

solución:

(a) las curvas de nivel son las gráficas de $y = g_c(x)$, donde $g_c(x) = x^3 + c$.

A_a está delimitado por debajo por la curva $y = -e^{-x}$, por encima por el eje horizontal y por la derecha y por la izquierda por las rectas verticales $x = 0$ y $x = a$ (si $a = 1$) como se puede ver en la siguiente gráfica

b) Como la función f crece cuando x disminuye e y aumenta, es obvio que el máximo es 0, que se obtiene en el punto $(0, 0)$, para cualquier valor de a .

De la misma manera, si $a = 1$, el mínimo se obtiene en el punto $(1, -e^{-1})$ y toma el valor $-e^{-1} - 1$, ya que $h(x) = f(x, -e^{-x}) = -e^{-x} - x^3$, el valor de la función objetivo f evaluada a lo largo de la curva $y = -e^{-x}$, es una función cóncava y obtiene su mínimo en uno de los puntos extremos $x = 0$ o $x = 1$.

Como $h(1) = -e^{-1} - 1 < h(0) = -1$, tenemos que $-1 - e^{-1}$ es el mínimo.

En el otro caso, el mínimo no existe si $a = \infty$, ya que $f(x, 0) = -x^3$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a ∞ .

2. Sea $B(x, y) = 9x - 5x^2 + 6y - 20y^2 + 4axy$ la función de beneficios de una empresa cuando vende x unidades de un producto E e y unidades de un producto F, donde a es un parámetro desconocido.
- (a)(0.5 puntos) Calcule el valor de a para que $B(x, y)$ sea una función estrictamente cóncava.
- (b)(0.5 puntos) Supongamos ahora que $a = 1$. Encuentre los puntos críticos de $B(x, y)$, y calcule la producción que maximiza el beneficio si es que existe alguna.
-

solución:

a) $HB(x, y) = \begin{pmatrix} -10 & 4a \\ 4a & -40 \end{pmatrix}$. Tenemos

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 400 - 16a^2 = 16(25 - a^2) > 0 \Leftrightarrow |a| < 5.$$

b) Si (x, y) es un punto crítico tiene que ser una solución del sistema

$$\nabla B(x, y) = (9 - 10x + 4y, 6 - 40y + 4x) = (0, 0).$$

Multiplicando a la primera ecuación por 10, y sumándosela a la segunda obtenemos, $90 - 100x + 6 + 4x = 0 \Rightarrow x = 1$, y sustituyendo en la primera ecuación $y = 1/4$.

3. Considere la función $f(x, y) = 2 \ln(1 + x) + \ln(1 + 2y)$ definida en el conjunto $A = \{(x, y) : x + y = 1, x > 0, y > 0\}$.
- (a)(0.3 puntos) Encuentre el punto (x_0, y_0) que satisface las condiciones de Lagrange para los extremos locales de f en A .
- (b)(0.4 puntos) Demuestre que (x_0, y_0) es el maximizador global de f en el conjunto $B = \{(x, y) : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- Ayuda para b):* observando que f es creciente para ambas variables x e y , y estrictamente cóncava, represente el conjunto $C = \{(x, y) : f(x, y) \geq f(x_0, y_0)\}$.
- (c)(0.3 puntos) Considere la función f definida sobre $A^* = \{(x, y) : x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Encuentre el punto, si es que existe, donde f alcanza su mínimo valor.
-

solución:

a) $\nabla f(x, y) = (2/(1 + x), 2/(1 + 2y)) = \lambda(1, 1) \Rightarrow$ el punto (x, y) debe cumplir:

$$\begin{cases} 1 + x = 1 + 2y \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) = (2/3, 1/3) \text{ como puede ver en la gráfica}$$

b) El conjunto C debe de ser convexo, sin segmentos en su frontera (ya que f es estrictamente cóncava),

y estar por encima del conjunto B (al ser f creciente con respecto a ambas variables), así (x_0, y_0) es el maximizador global de f en B .

c) Al ser A^* un conjunto compacto y f una función continua en dicho conjunto, por el teorema de Weierstrass sabemos que alcanza su mínimo, el cual solamente puede obtenerse en $(1, 0)$ o $(0, 1)$.

Como $f(0, 1) = \ln 3 < \ln 4 = 2 \ln 2 = f(1, 0)$, el valor mínimo se obtiene en el punto $(0, 1)$.

4. Considere un consumidor que gasta una renta m de 36 euros en dos productos: A , que tiene un precio unitario de 9 euros, y B , con un precio de 1 euro.
- Supongamos que la función de utilidad del consumidor es: $U(x,y) = 30\sqrt{xy}$, donde x,y son las cantidades de los productos A,B consumidos, respectivamente.
- (a)(0.3 puntos) Si suponemos que el consumidor obtiene su utilidad máxima cuando consume las cantidades $x = 2, y = 18$, ¿cuál es el valor del multiplicador de Lagrange para este problema?
- (b)(0.3 puntos) ¿Cuánto disminuye, aproximadamente, la utilidad del consumidor si su renta se reduce a 35 euros?
- Ayuda para b): Si no ha podido resolver el apartado a), considere que el valor del multiplicador de Lagrange es 3.
- (c)(0.4 puntos) Suponga ahora que el consumidor puede adquirir una pequeña cantidad extra de A y B sin ningún coste, y observamos que el consumidor ha aumentado su consumo del producto B en 0.01 unidades; es decir: $x = 18.01$ ahora. ¿Cuánto ha sido, aproximadamente, el aumento en su consumo del producto A ?
-

solución:

a) Considerando la función lagrangiana $L(x,y;\lambda) = 30\sqrt{xy} + \lambda(36 - 9x - y)$,

Si calculamos la derivada parcial con respecto a x obtenemos:

$\partial L/\partial x = 15\sqrt{y/x} - 9\lambda = 0$; y ahora, teniendo en cuenta que $(x,y) = (2, 18)$,

obtenemos que $45 = 9\lambda \Rightarrow \lambda = 5$.

b) Como $\Delta U \approx \lambda \Delta m = -5$

c) Como $\nabla U(2,9) = 30(3/2, 1/6) = (45, 5) = 5(9, 1)$ cuando el consumidor aumenta su consumo de B en 0.01 unidades, debe aumentar también su consumo de A en 0.09 unidades, como nos indica el gradiente U que señala en la dirección de máximo crecimiento de U .