April 27, 2022

3. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD: MÉTODO DE LAGRANGE

En toda esta sección D denota un **subconjunto abierto** de $\mathbb{R}^n$.

1. Introducción

El problema de optimización con restricciones de igualdad se define como

$$\max \quad (\text{resp. } \min) \quad f(x) \quad \text{s.a: } x \in S, \tag{1.1}$$

donde $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, \dots, g_m) : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con $m < n$ y $S = \{x \in D : g(x) = b\}$, donde $b = (b_1, \dots, b_m)$.

1.1. **Eliminación de restricciones.** Cuando sea posible encontrar funciones $h = (h_1, \dots, h_m)$ que permitan expresar m variables en términos de las restantes $n - m$ variables (por ejemplo, las primeras m variables tras una reordenación si fuera necesario), en la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_m &= h_m(x_{m+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

de manera que el sistema obtenido es equivalente al original, $g(x) = b$, entonces $x_0 = (x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$ es solución del problema de optimización sin restricciones

$$\operatorname{opt} f(h(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n)$$

si y sólo si $(h(x_0), x_0)$ es solución de (1.1).

Ejemplo 1.1. Se quiere resolver el problema

$$\min \; f(x, y, z) = 2x + y - z \quad \text{s.a: } \begin{cases} x - y + z = 6, \\ z^2 - y = 0. \end{cases}$$

Despejamos x y y como funciones de z: $y = z^2$, $x = 6 + z^2 - z$ y substituimos estos valores en la expresión de f, que se convierte así en función de z únicamente.

$$F(z) = f(6 + z^2 - z, z^2, z) = 2(6 + z^2 - z) + z^2 - z = 12 + 3z^2 - 3z.$$

La función F es una parábola convexa, luego su vértice, $z^0 = \frac{1}{2}$, es el mínimo global y, por tanto, el mínimo global del problema orginal es

$$(x^0, y^0, z^0) = \left(\frac{23}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

El valor mínimo de f en el conjunto factible es $2 \cdot \frac{23}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{45}{4}$.

Por supuesto, no siempre es posible despejar explíicitamente unas variables en función de otras. Por este motivo, se ha desarrollado el método de los multiplicadores de Lagrange, que se expone a continuación.

2. Condiciones necesarias de primer orden: Teorema de Lagrange

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, \dots, g_m) : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tales que f y g son de clase C^1 en D.

Definición 2.1. El punto $x_0 \in S$ es un punto regular de (1.1) si el rango de la matriz jacobiana de g en x_0, $\mathrm{D}\, g(x_0)$, coincide con el número de restricciones, m.

Observación 2.2. Intuitivamente, si todos los puntos de S son regulares, esta condición significa que el conjunto factible S es un 'objeto' regular y suave, en $\mathbb{R}^n$, de dimensión $n - m$ y que en cada punto $x \in S$ existe el plano tangente a S, $T_x S$, que se define como

$$x + \{v \in \mathbb{R}^n : \mathrm{D}\, g(x)v = 0\} = \{x + v : v \in \mathbb{R}^n, Dg(x)v = 0\} \tag{2.1}$$

Definición 2.3. La función Lagrangiana de (1.1) es

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot (b - g(x)),$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ y

$$\lambda \cdot (b - g(x)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x)).$$

Teorema 2.4 (Teorema de Lagrange)**.** Si $x_0 \in S$ es un punto regular de S y solución de (1.1), entonces existe un único vector $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$ tal que (x_0, λ_0) es un punto crítico de la función Lagrangiana de (1.1), es decir

$$\nabla_x L(x_0, \lambda_0) = 0,$$
$$\nabla_\lambda L(x_0, \lambda_0) = 0.$$

Definición 2.5. Si (x_0, λ_0) es un punto crítico de la función Lagrangiana de (1.1), entonces se dice que x_0 es un punto crítico relativo de f en S y que $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0 \in \mathbb{R}$ son los multiplicadores de Lagrange asociados.

Definición 2.6. Las ecuaciones

$$\nabla_x L(x_0, \lambda_0) = 0,$$
$$\nabla_\lambda L(x_0, \lambda_0) = 0.$$

se denominan ecuaciones de Lagrange.

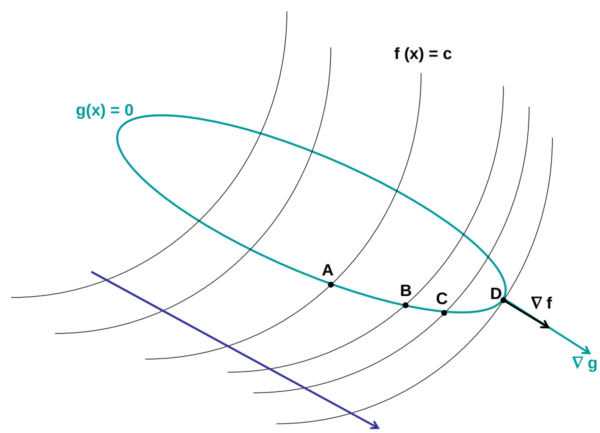
Observación 2.7. El sistema de ecuaciones de Lagrange consta de $n + m$ ecuaciones y de $n + m$ incógnitas (es un sistema cuadrado).
Notar que $\nabla_\lambda L(x_0, \lambda_0) = 0$ es equivalente a $g(x) = b$.

Observación 2.8. Si S es compacto, entonces el Teorema de Weierstrass asegura la existencia de soluciones globales de (1.1) (dado que f es continua por ser diferenciable). Si la condición de regularidad se cumple, entonces estos extremos globales deben ser punto críticos relativos de f en S. Por tanto, para determinar los extremos globales, bastará evaluar estos puntos críticos con la función objetivo f. Los valores extremales de f determinarán los máximos y los mínimos de f en S.

Observación 2.9 (¿Por qué las ecuaciones de Lagrange deberían ser ciertas?)*.* Para simplificar, supongamos que sólo hay una restricción y el problema es

$$\begin{array}{rcl} \max & = & f(x) \\ \text{s.a.} & & g(x) = 0 \end{array}$$

En el dibujo siguiente hemos representado el conjunto $\{x : g(x) = 0\}$ y las superficies (o curvas) de nivel $f(x) = c$. La flecha indica la dirección de crecimiento de f (que en cada punto está dada por el gradiente de f).



Vemos que, por ejemplo, el punto A no puede ser un máximo de f en el conjunto $\{x : g(x) = 0\}$, ya que f alcanza un valor mayor en el punto B, es decir $f(B) > f(A)$. Asimismo, vemos gráficamente que $f(C) > f(B)$. El punto D es exactamente el punto en el que si nos movemos en la dirección de $\nabla f(D)$ ya no se verifica la restricción $g(x) = 0$. En D, las curvas de nivel $f(x) = c$ y $g(x) = 0$ son tangentes o, equivalentemente, $\nabla f(D)$ y $\nabla g(D)$ son paralelos, lo cual significa que uno es un múltiplo del otro $\nabla f(D) = \lambda \nabla g(D)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.10 (Maximización de Utilidad con Restricciones Presupuestarias)*.* Consideremos el problema

$$\left.\begin{array}{ll} \max & u(x) \\ \text{s.a.} & p \cdot x = t \end{array}\right\}$$

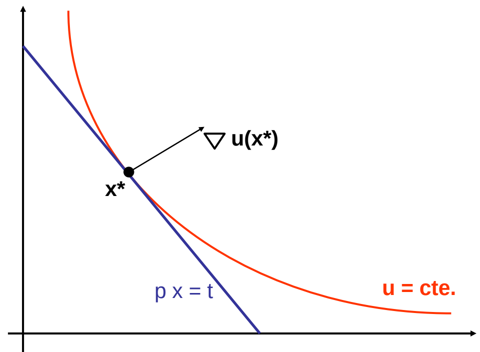
El punto $x \in \mathbb{R}^n_+$ se interpreta como la cesta de consumo y $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ como los precios de los bienes. El agente tiene una renta t y escoge una cesta de consumo x tal que maximiza su utilidad sujeto a la restricción presupuestaria , $p \cdot x = t$. La función de Lagrange es

$$L = u(x) + \lambda(t - px)$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\left.\begin{array}{l} \nabla u = \lambda p \\ px = t \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Por lo que si x^* es una solución del problema, entonces $\nabla u(x^*)$ es perpendicular al plano $p \cdot x = t$.



Por otra parte, vemos que las ecuaciones 2.2 son equivalente a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathrm{MRS}_{ij}(x) &= \frac{p_i}{p_j} \\ px &= t \end{aligned}$$

donde

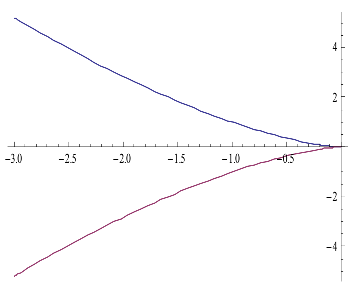
$$\mathrm{MRS}_{ij} = \frac{\partial u \,/\partial x_i}{\partial u \,/\partial x_j}$$

es la relación marginal entre el bien i y el bien j.

Ejemplo 2.11 (La condición de regularidad). Este es un ejemplo que ilustra que si la condición de regularidad 2.1 no se verifica, las ecuaciones de Lagrange pueden no determinar el óptimo. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max &= x \\ \text{s.a.} & \quad x^3 + y^2 = 0 \end{aligned}$$

El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^2 = 0\}$ está representado en la siguiente figura



Claramente, la solución es $x = 0$. Pero si escribimos el Lagrangiano

$$L = x + \lambda(x^3 + y^2)$$

las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 1 - 3\lambda x^2 &= 0 \\ -2\lambda y &= 0 \\ x^3 + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

La primera ecuación implica que $x \neq 0$ (¿por qué?). Usando la tercera obtenemos que $y = \sqrt{-x^3} \neq 0$. Como $y \neq 0$ la segunda ecuación implica que $\lambda = 0$. Pero al sustituir $\lambda = 0$ obtenemos una contradicción. Por tanto, este sistema formado por las ecuaciones de Lagrange no tiene solución.
¿Qué es lo que falla? El Jacobiano de g es

$$\mathrm{D}\, g(x, y) = (3x^2, 2y)$$

El punto $(0, 0)$ verifica la restricción del problema, pero

$$\operatorname{rank}(\mathrm{D}\, g(0, 0)) = \operatorname{rank}(0, 0) = 0$$

por lo que la condición de regularidad no se verifica.

3. Condiciones necesarias y suficientes de segundo orden

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, \ldots, g : m) : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tales que f y g son de clase C^2 en D.

Definición 3.1. La matriz Hessiana de L con respecto a x, $\mathrm{H}_x\, L(x, \lambda)$, es la matriz simétrica cuyo elemento (i, j) es

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x, \lambda).$$

Recordar la definición 2.1 de espacio tangente al conjunto factible S en un punto $x_0 \in S$

$$x_0 + \{v \in \mathbb{R}^n : \mathrm{D}\, g(x_0) v = 0\}.$$

Definición 3.2. El subespacio tangente a S en el punto $x_0 \in S$ es

$$T_S(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n : \mathrm{D}\, g(x_0) v = 0\}$$

Luego, el espacio tangente es simplemente $x_0 + T_S(x_0)$.

Teorema 3.3 (Condiciones necesarias de segundo orden)**.** Sea x_0 un punto regular de (1.1), que satisface las condiciones de primer orden con vector de multiplicadores asociado $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$. Se tiene

(1) si x_0 es un mínimo local de f en S, entonces la forma cuadrática $\mathrm{H}_x\, L(x_0, \lambda_0)$ restringida a $T_S(x_0)$ es definida positiva o semidefinida positiva.
(2) si x_0 es un máximo local de f en S, entonces la forma cuadrática $\mathrm{H}_x\, L(x_0, \lambda_0)$ restringida a $T_S(x_0)$ es definida negativa o semidefinida negativa.

Corolario 3.4. Si la forma cuadrática $\mathrm{H}_x\, L(x_0, \lambda_0)$ restringida a $T_S(x_0)$ es indefinida, entonces x_0 no es extremo de f en S.

Teorema 3.5 (Condiciones suficientes de segundo orden)**.** Sea x_0 un punto regular de (1.1), que satisface las condiciones de primer orden con vector de multiplicadores asociado $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$. Se tiene que

(1) si la forma cuadrática $\mathrm{H}_x\, L(x_0, \lambda_0)$ restringida a $T_S(x_0)$ is definida positiva, entonces x_0 es un mínimo local estricto de f en S.

(2) si la forma cuadrática $\mathrm{H}_x\, L(x_0, \lambda_0)$ restringida a $T_S(x_0)$ is definida negativa, entonces x_0 es un máximo local estricto de f en S.

Ejemplo 3.6. Vamos a resolver el problema

$$\begin{array}{cc} \max & xy \\ \text{s.a.} & p_1 x + p_2 y = m \end{array}$$

con $m, p_1, p_2 \neq 0$.
Sea $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = m - p_1 x - p_2 y$. Entonces $\nabla g(x,y) = (y,x)$ que es no nulo en el conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon p_1 x + p_2 y = m\}$. Por tanto, se verifica la condición de regularidad. Construimos el lagrangiano

$$L(x) = xy + \lambda(m - p_1 x - p_2 y).$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{array}{rcl} y - \lambda p_1 & = & 0 \\ x - \lambda p_2 & = & 0 \\ p_1 x + p_2 y & = & m. \end{array}$$

La solución de este sistema es

$$x^* = \frac{m}{2p_1}, \qquad y^* = \frac{m}{2p_2} \qquad \lambda = \frac{m}{2p_1 p_2}$$

El hessiano de L en el punto

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}; \frac{m}{2p_1 p_2}\right)$$

es

$$\mathrm{H}\, L(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es una matriz indefinida. Por otra parte,

$$\begin{array}{rcl} T_S(x^*, y^*) & = & \{v \in \mathbb{R}^2 \colon \nabla g\left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}\right) \cdot v = 0\} \\ & = & \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \colon (p_1, p_2) \cdot (v_1, v_2) = 0\} \\ & = & \{(t, -\frac{p_1}{p_2} t) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Por tanto

$$(t, -\frac{p_1}{p_2} t) \cdot \mathrm{H}\, L(x^*, y^*) \begin{pmatrix} t \\ -\frac{p_1}{p_2} t \end{pmatrix} = (t, -\frac{p_1}{p_2} t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\frac{p_1}{p_2} t \end{pmatrix} = -\frac{p_1}{p_2} t^2 < 0$$

si $t \neq 0$. Por lo tanto,

$$\left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}\right)$$

es un máximo.

Ejemplo 3.7. Vamos a resolver el problema

$$\begin{array}{cc} \max & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} & xy = 4 \end{array}$$

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = xy$. Entonces $\nabla g(x,y) = 2(y,x)$ que es no nulo en el conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 4\}$. Por tanto, se verifica la condición de regularidad. Construimos el lagrangiano

$$L(x) = x^2 + y^2 + \lambda xy.$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 2x + \lambda y &= 0 \\ 2y + \lambda x &= 0 \\ xy &= 4. \end{aligned}$$

Este sistema tiene dos soluciones

$$\begin{aligned} x &= y = 2, \lambda = -2 \\ x &= y = -2, \lambda = -2. \end{aligned}$$

El hessiano de L es en el punto $(2,2;-2)$ es

$$\mathrm{H}\, L_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix}\bigg|_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} T_S(2,2) &= \{v \in \mathbb{R}^2 \colon \nabla g(2,2) \cdot v = 0\} \\ &= \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \colon (2,2) \cdot (v_1,v_2) = 0\} \\ &= \{(t,-t) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Por tanto

$$(t,-t) \cdot \mathrm{H}\, L_{(2,2)} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = (t,-t) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = 8t^2$$

por lo que $\mathrm{H}\, L_{(2,2)}$ es definida positiva sobre $T_{(2,2)}M$ de donde se concluye que $(2,2)$ es un mínimo.

4. Interpretación económica del multiplicador de Lagrange

Considere el problema de Lagrange

$$\max \ f(x) \quad \text{s.a: } g(x) = b. \tag{4.1}$$

Definición 4.1. La función valor (o función indirecta de utilidad) del problema (4.1) es

$$V(b) = \max\{f(x) \,:\, g(x) = b\}, \quad b \in B \subseteq \mathbb{R}^m, \text{ un conjunto abierto.}$$

La correspondencia de soluciones óptimas del problema (4.1) es

$$X_0(b) = \{x_0 \in S \,:\, f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in S\}.$$

A continuación supondremos que $X_0(b)$ contiene un único punto (es decir, que para cada valor del parámetro b, hay una y sóla una solución óptima), luego $X_0(b)$ es una función y la denotaremos por $x_0(b)$ $(X_0(b) = \{x_0(b)\})$. Notar que $V(b) = f(x_0(b))$ por definición. Nos preguntamos ¿Cómo depende V de b?
En el teorema siguiente, recordar que la Lagrangiana es $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda \cdot (b - g(x))$.

Teorema 4.2. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, \ldots, g_m) : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tales que f y g son de clase C^2 en D. Sea $b_0 \in B$ tal que $x_0(b_0)$ es una solución regular de (1.1) y

$$\begin{vmatrix} (0)_{m\times m} & \mathrm{D}\, g(x_0(b_0)) \\ \mathrm{D}\, g(x_0(b_0))^t & \mathrm{H}_x\, L(x_0(b_0), \lambda_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

donde λ_0 es el vector de multiplicadores de Lagrange asociados a $x_0(b_0)$. Entonces, la función valor V es de clase C^1 en una bola centrada en b_0 y

$$\lambda_i^0 = \frac{\partial V}{\partial b_i}(b_0), \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{4.2}$$

Observación 4.3. El multiplicador de Lagrange λ_i está asociado a la restricción i-ésima. El multiplicador mide la variación del valor óptimo de f ante cambios en el término independiente b_i. Es por esta razón que a λ_i se le denomina **precio sombra** o **valor marginal** de b_i. Notar que un incremento de una unidad de b_i 'ceteris paribus' tiene un efecto sobre el valor óptimo estimado de

$$V(b_1^0, \ldots, b_{i-1}^0, b_i^0 + 1, b_{i+1}^0, \ldots, b_m^0) - V(b) \approx \lambda_i.$$

En general, si el incremento en b_0 es Δb (preferiblemente pequeño para obtener resultados significativos), entonces

$$V(b_0 + \Delta b) - V(b_0) \approx \lambda \cdot \Delta b.$$

Ejemplo 4.4 (Función indirecta de utilidad). Se considera el problema de Lagrange

$$\begin{array}{ll} \max & u(x,y) \\ \text{sujeto a:} & p_1 x + p_2 y = m \end{array}$$

En este problema, un consumidor elige cestas de consumo (x, y) sujeto a su restricción presupuestaria, donce, dados los precios (p_1, p_2), la cesta tiene un coste de $p_1 x + p_2 y = m$, siendo m la renta disponible del consumidor.
Para resolver este problema, consideramos la función de Lagrange

$$L(x) = u(x) + \lambda(m - p_1 x - p_2 y).$$

Sea $x(p_1, p_2, m)$, $y(p_1, p_2, m)$ la solución (suponemos que es única para cada (p_1, p_2, m). Sea

$$V(p_1, p_2, m) = u(x(p_1, p_2, m))$$

la función indirecta de utilidad. Entonces,

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \lambda$$

Luego el multiplicador λ representa la utilidad marginal de la renta del consumidor.

Ejemplo 4.5. Un consumidor resuelve el problema max xy, sujeto a $2x + 4y = 32$, $x, y \geq 0$ y obtiene que el multiplicador de su restriccón presupuestaria es $\lambda_0 = 2$. ¿Cuál es el incremento aproximado de la utilidad del consumidor, si éste dispone de una unidad adicional de renta?
Sabemos que el valor marginal de la renta para el consumidor cunado éste dispone de 32 u.m. es $V'(32) = \lambda_0 = 2$. Luego, disponer de una unidad adicional, incrementa su utilidad en aproximadamente $\Delta V = V(33) - V(32) \approx 2$.

Observación 4.6. Vamos a justificar la ecuación (4.2) para el caso en que sólo existe una restriccón. Sea el problema de Lagrange

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.t.:} \quad & g(x) = b. \end{aligned}$$

Sea λ el multiplicador de Lagrange, y sea $x(b)$ la solución (única) del problema. Entonces, las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Notar que $x(b)$ satisface la ecuación

$$g\left(x(b)\right) = b$$

en $b = b_0$. La condición de regularidad exigida en el Teorema de Lagrange, permite deducir mediante el Teorema de la Función Implícita que $x(b)$ está bien definida y es de clase C^1 en un intervalo centrado en b_0. Derivando la ecuación anterior, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}\left(x(b)\right) \frac{\partial x_k}{\partial b}(b) = 1.$$

Por otra parte, usando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f\left(x(b)\right)}{\partial b} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x(b)\right) \frac{\partial x_k}{\partial b}(b) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}\left(x(b)\right) \frac{\partial x_k}{\partial b}(b) = \lambda.$$

Observación 4.7. La ecuación (4.2) también es cierta con restriccinoes de igualdad, como veremos en el tema siguiente.