February 2, 2022

1. INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA

1. Programación Matemática

La Programación Matemática se dedica al estudio y resolución de problemas de optimización. Un problema de optimización consiste en la determinación de los máximos y mínimos de una función en su dominio, o en subconjuntos definidos mediante igualdades y/o desigualdades. Un programa matemático se expresa de la siguiente forma.

$$\operatorname{opt} f(x) \quad \text{s.a: } x \in S, \tag{1.1}$$

donde $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $S \subseteq D$, y donde "opt" denota "optimizar" y más específicamente, puede substituirse por "max" para "maximizar" o por "min", para "minimizar".

A lo largo de todo este tema, D denota un **conjunto abierto** de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1. En un programa matemático se distinguen los siguientes elementos y conceptos.

- f es la *función objetivo* y S es el *conjunto factible*.
- El programa (1.1) es *imposible* si $S = \emptyset$.
- Un elemento $x_0 \in D$ es *factible* si $x_0 \in S$. En caso contrario, es no factible.
- Un elemento factible x_0 es una solución local o global de (1.1) si x_0 es un extremo local o global de f restringido a S, respectivamente.

Recordamos a continuación los conceptos de máximo y mínimo local y global de f en un conjunto S.

Definición 1.2. Sea $f : S \subseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$, con $S \neq \emptyset$ y sea $x_0 \in S$. Diremos que x_0 es

- un máximo local (o relativo) de f en S si y sólo si $\exists r > 0$ tal que $\forall x \in B(x_0, r) \cap S$, $f(x) \leq f(x_0)$.
- un mínimo local (o relativo) de f en S si y sólo si $\exists r > 0$ tal que $\forall x \in B(x_0, r) \cap S$, $f(x_0) \leq f(x)$.
- un máximo local (o absoluto) de f en S si y sólo si $\forall x \in S$, $f(x) \leq f(x_0)$.
- un mínimo global (o absoluto) de f en S si y sólo si $\forall x \in S$, $f(x_0) \leq f(x)$.

Si la desigualdad es estricta ($<$ or $>$) para $x \neq x_0$, entonces se dice que x_0 es un máximo/mínimo local/global estricto.

Observación 1.3. A un máximo/mínimo de f se le llama genéricamente un extremo de f. Notar que un extremo global es local, y que los extremos estrictos son únicos.

Proposición 1.4. Sea $f : S \subseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$, con $S \neq \emptyset$ y sea $x_0 \in S$. El punto x_0 es un máximo local/global de f en S, si y sólo si x_0 es un mínimo local/global de $-f$ en S.

Observación 1.5. Por el Teorema de Weierstrass, si f es continua en S y S es compacto (cerrado y acotado), entonces el Problema (1.1) admite soluciones globales

2. Clasificación de los Programas Matemáticos

El Problema (1.1) se clasifica atendiendo a las caracterí sticas de la función objetivo y del conjunto factible.

Definición 2.1. Diremos que el Poblema (1.1) es

- un problema sin restricciones, si $S = D$.
- un problema con restricciones de igualdad, si
$$S = \{x \in D \,:\, g_1(x) = b_1, \dots, g_m(x) = b_m\},$$
donde $g_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.
- un problema con restricciones de desigualdad si el conjunto factible S es de la forma
$$S = \{x \in D \,:\, g_1(x) \leq b_1, \dots, g_m(x) \leq b_m\},$$
donde $g_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $b_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, m$.

Definición 2.2. El Problema (1.1) es un programa lineal si la función objetivo es una función lineal, $f(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$, y el conjunto factible
$$S = \{x \in D \,:\, g_1(x) \leq b_1, \dots, g_m(x) \leq b_m\}$$
está dado por funciones lineales, $g_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ (en este caso, S es un politopo).

Definición 2.3. El Problema (1.1) es un programa convexo si S es un conjunto convexo y se da uno de los dos casos siguientes:

- f es cóncava y "opt=max', o
- f es convexa y "opt=min".

3. Propiedades geométricas de los programas matemáticos

En esta sección estudiamos algunas de las propiedades que ayudan a la resolución gráfica de los problemas de optimización, cuando $n = 2$.

Definición 3.1. El conjunto de nivel k de una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto
$$C_k(f) = \{x \in D \,:\, f(x) = k\}.$$
Cuando $n = 2$, se denomina curva de nivel.

Observación 3.2. Los conjuntos de nivel son disjuntos, es decir $C_k(f) \cap C_{k'}(f) = \emptyset$ si $k \neq k'$. Además, la unión de todos los conjuntos de nivel de f llenan D, es decir
$$\bigcup_k C_k(f) = D.$$

¿Cuál es la dirección en la que nos encontramos con conjuntos de nivel mayor (menor)?

Teorema 3.3. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con D abierto y sea f diferenciable.

- Dado $x_0 \in D$, la derivada direccional de f en x_0 toma su valor mayor en la dirección del vector gradiente de f en x_0, $\nabla f(x_0)$ (y, por tanto, $-\nabla f(x_0)$ es la dirección de más rápido descenso).

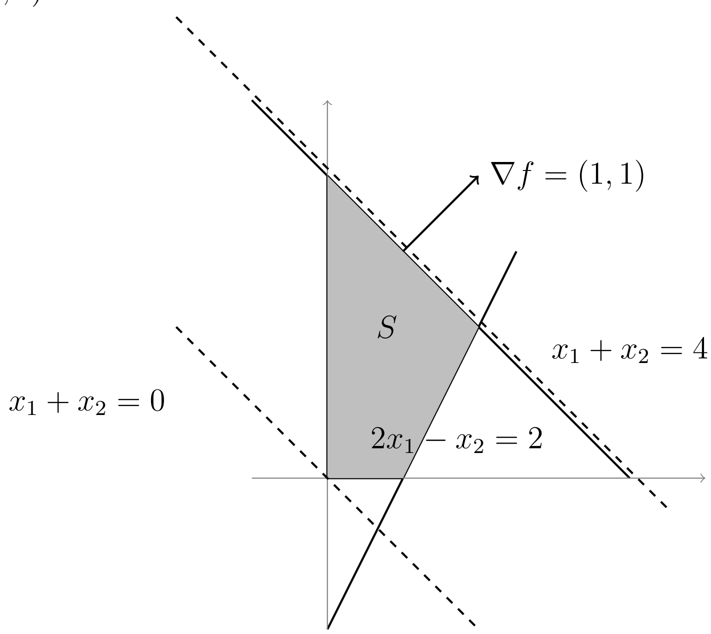
- Dado $x_0 \in C_k(f)$, el vector gradiente, $\nabla f(x_0)$, es perpendicular al conjunto de nivel $C_k(f)$ en x_0.

Observación 3.4 (Instrucciones para la resolución geométrica de (1.1) cuando $n = 2$.). Dibujar el conjunto S y superponer algunas curvas de nivel de f, para diferentes valores de k. Estamos interesados en las curvas de nivel mayor y menor que tienen intersección no vacía con S. Los puntos de esta intersección son los extremos globales de f en S. El vector gradiente da la dirección de más rápido incremento de f, y su opuesto, la dirección de más rápido descenso.

Ejemplo 3.5. Resolver geométricamente los problemas

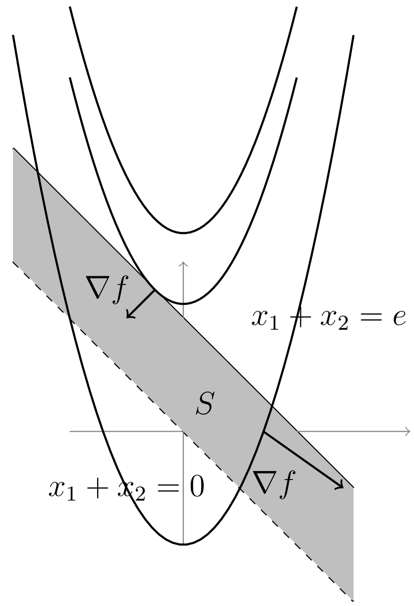
(1) opt $x_1 + x_2$ sujeto a $2x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.
(2) opt $x_1^2 - x_2$ sujeto a $\ln(x_1 + x_2) \leq 1$

(1) Las curvas de nivel son las rectas $x_1 + x_2 = k$, $k \in \mathbb{R}$. La dirección de preferencia es $\nabla f(x_1, x_2) = (1, 1)$,para todo (x_1, x_2), donde $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. La recta de nivel mayor que contiene puntos del conjunto factible es $x_1 + x_2 = 4$, luego el segmento de extremos $(0, 4)$ y $(2, 2)$ es un segmento de máximos globales de f en S. El mínimo se alcanza en $(0, 0)$.



(2) Las curvas de nivel $\{x_1^2 - x_2 = k\}$, $k \in \mathbb{R}$, son parábolas convexas. El gradiente de $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ es $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, -1)$, que es la dirección (dependiente del punto) donde la función crece a mayor ritmo. No existen puntos del conjunto factible por el que pasen curvas de nivel máximo, luego el problema no está acotado superiormente, y no existe máximo global. Sin embargo, hay un punto del conjunto factible que pertenece a una curva de nivel menor de entre todas las que cortan a S: es el punto de tangencia de la curva de nivel k (por determinar) y la recta $x_1 + x_2 = e$. La pendiente de la parábola en el punto (x_1, x_2) es $2x_1$. La pendiente de la recta $x_1 + x_2 = e$ es -1. Luego, el punto de tangencia satisface $2x_1 = -1$, o $x_1 = -\frac{1}{2}$. Al

substituir en la recta, encontramos que $x_2 = e+\frac{1}{2}$. Luego, el mínimo global de f en S es el punto $(-\frac{1}{2}, e+\frac{1}{2})$ y el valor mínimo de f en S es $f(-\frac{1}{2}, e+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}-e-\frac{1}{2} = -e-\frac{1}{4}$.



4. Conjuntos Ordenados y Funciones Monótonas en Espacios Vectoriales

En el conjunto de los números reales existe una relación de orden de manera natural definida de la siguiente forma: dados dos números reales x, y, decimos que $x \leq y$ si se cumple $y-x \geq 0$ y decimos que $x < y$ si $y - x > 0$. Esta definición establece una relación que llamaremos de orden entre los números x e y. Los números reales pueden relacionarse entre sí de otras muchas formas. Por ejemplo, podemos definir la siguiente relación: x está relacionado con y si $x-y$ es un número entero. Escribiremos xRy para indicar que x está relacionado con y. El conjunto de pares de números coordenados (x, y) que están relacionados de esta forma, xRy, forman un subconjunto del espacio producto o producto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Por lo tanto una relación en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es nada más que un subconjunto de elementos del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Obviamente, una relación se puede definir en cualquier conjunto de elementos.

Definición 4.1. Definimos una relación binaria entre los elementos de un conjunto X como un subconjunto $R \subseteq X \times X$. Decimos que $x \in X$ está relacionado con $y \in X$, y escribimos xRy, si $(x, y) \in R$.

Estamos especialmente interesados en aquellas relaciones que proporcionan un orden dentro de los elementos de un conjunto dado. Este tipo de relaciones R llamadas de orden, se denotan por $\preceq$.

Definición 4.2. Sea X un conjunto no vacío y sea $\preceq$ una relación binaria de elementos en X. Decimos que $(X, \preceq)$ es un *conjunto ordenado* si la relación $\preceq$ es de orden, esto es, se cumplen las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva:

(i) Reflexiva $x \preceq x$;

(ii) Antisimétrica $[x \preceq y \text{ e } y \preceq x] \Rightarrow x = y$;
(iii) Transitiva $[x \preceq y \text{ e } y \preceq z] \Rightarrow x \preceq z$

para todos los elementos $x, y, z \in X$.

Definición 4.3. Dado $(X, \preceq)$, un orden $\preceq$ se dice que es un *orden total* si cualquier par de elementos distintos son *comparables*: $\forall x, y \in X$ $[x \preceq y \text{ o } y \preceq x]$.
Una relación de orden que no sea total decimos que es parcial. En este caso, existen al menos dos elementos que no están relacionados entre sí (existen x e y tal que, no se cumple $x \preceq y$ ni $y \preceq x$); en este caso decimos que los elementos son *incomparables*.

Observación 4.4. $(X, \preceq)$ puede ser un conjunto totalmente o parcialmente ordenado.

Ejemplo 4.5. Podemos ilustrar los conceptos definidos arriba mediante dos ejemplos.

(1) La recta real de números con el orden usual $(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.
(2) $(\mathbb{R}^2, \preceq_P)$ es un conjunto parcialmente ordenado, donde $\preceq_P$ denota el *orden de Pareto*:

$$(x_1, y_1) \preceq_P (x_2, y_2) \Longleftrightarrow (x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2).$$

Geométricamente, esto quiere decir que el punto (x_1, y_1) se encuentra por debajo y a la izquierda del punto (x_2, y_2). Por lo tanto, (0,1) y (1,0) son dos elementos incomparables entre sí con el orden de Pareto.

Definición 4.6. Si $(X, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado, definimos para cualquier conjunto de elementos no vacío $A \subset X, \quad A \neq \emptyset$:

El máximo de (A): $\max(A) = M$ es el mayor elemento de $A \Leftrightarrow$ $[\forall a \in A \Rightarrow a \preceq M \text{ y } M \in A]$.
El mínimo de (A): $\min(A) = m$ es el menor elemento de $A \Leftrightarrow$ $[\forall a \in A \Rightarrow m \preceq a \text{ y } m \in A]$.

Ejemplo 4.7. Dado $(\mathbb{R}, \leq)$.

(1) Cualquier subconjunto finito A de $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimio.
(2) $A = [0, 1]$ tiene los dos, máximo y mínimo.
(3) $A = [0, 1)$ tiene mínimo pero no tiene máximo.
(4) $A = (-\infty, 1]$ tiene máximo pero no mínimo.

Observación 4.8. Analogamente, podemos definir el máximo y el mínimo en un conjunto parcialmente ordenado $(X, \preceq)$, pero no es un concepto muy útil.

Ejemplo 4.9. Considerando $(\mathbb{R}^2, \preceq_P)$. Dado el conjunto $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ observamos que no tiene máximo.

Para resolver la carencia mostrada en este ejemplo introducimos las siguientes definiciones.

Definición 4.10. Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado, para cualquier subconjunto no vacío, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, definimos:

Elementos maximales de (A): Un elemento maximal de A es un elemento del conjunto que no es menor que cualquier otro elemento en A
maximal$(A) = \{a \in A : \nexists a' \in A,\ a' \neq a$ y $a \preceq a'\}$,

Elementos minimales de (A): Un elemento minimal de A es un elemento del conjunto que no es mayor que cualquier otro elemento en A
minimal$(A) = \{a \in A : \nexists a' \in A,\ a' \neq a$ y $a' \preceq a\}$

Ejemplo 4.11. Considerando $(\mathbb{R}^2, \preceq_P)$. El conjunto $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ tiene como elementos maximales: $maximal(A) = \{(x,y) \in A : x+y=1, \quad 0 \leq x \leq 1\}$.

Observación 4.12. Observamos que, si existe un máximo M, entonces es el único elemento maximal. De la misma forma, si un mínimo existe, es el único elemento minimal.
Pero lo contrario no es cierto: el conjunto $A = \{(x,y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{0 < x < 1, y = 0\}$ tiene un único elemento maximal, el punto $(0,1)$, pero no tiene máximo.

Observación 4.13. A los elementos maximales y minimales también se les conoce como elementos óptimos de Pareto. Es un concepto básico en economía desde principios del siglo XX.

Definición 4.14. Decimos que una función $f : (X, \preceq) \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona creciente cuando se cumple que: $z_1 \preceq z_2 \Longrightarrow f(z_1) \leq f(z_2)$. Por ejemplo, si $(X, \preceq)$ es un subconjunto del plano cartesiano con el orden de Pareto, esto quiere decir que:

$$z_1 = (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) = z_2 \Longrightarrow f(z_1) = f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_2) = f(z_2)$$

Ejemplo 4.15. Dos ejemplos:
(1) $f(x,y) = Ax + By$, es monótona creciente si y solo si $\min(A,B) \geq 0$.
(2) $f(x,y) = x^\alpha \cdot y^\beta$, definida en $[0,\infty) \times [0,\infty)$, es monótona creciente también cuando $\alpha, \beta > 0$.

Con respecto a las funciones estrictamente crecientes tenemos distintas posibles definiciones. La más utilizada, en el caso del orden de Pareto es:

Definición 4.16. Decimos que una función $f : (A, \preceq_P) \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente en $A \subset \mathbb{R}^2$, cuando se cumple:

$$z_1 = (x_1, y_1) \preceq_P (x_2, y_2) = z_2,\ z_1 \neq z_2 \Longrightarrow f(z_1) = f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2) = f(z_2)$$

Ejemplo 4.17. Dos ejemplos:
(1) $f(x,y) = Ax + By$, es estrictamente creciente si $\min(A,B) > 0$.
(2) por otra parte, $f(x,y) = x^\alpha \cdot y^\beta$, definida en $(0,\infty) \times (0,\infty)$, también es una función estrictamente creciente si $\alpha, \beta > 0$.

Teorema 4.18. Sea f una función definida en $A \subset \mathbb{R}^2$, con el orden de Pareto.
a) Si f es una función monótona creciente y A es un conjunto acotado superiormente por sus elementos maximales, el máximo de f se alcanzará en alguno de los puntos maximales de A y, quizá, en algún otro punto de A que no es un maximal.

b) Si f es estrictamente creciente y alcanza un máximo global, este se alcanzará en un punto del conjunto de los elementos maximales de A.

Observación 4.19. Un conjunto A está acotado superiormente por sus elementos maximales cuando, para cada $a \in A$, existe un elemento maximal M, que depende de a, tal que $a \preceq M$.

Ejemplo 4.20. Tenemos los ejemplos:

(1) Si f es una función constante, el máximo se obtendrá en todos los puntos del conjunto A y por lo tanto, sobre todos los elementos maximales de A suponiendo que exista alguno.
(2) Si f es una función continua, estrictamente creciente y definida en $A = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$, entonces f alcanzará su máximo global en el conjunto $B = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0, x + y = 1\}$, es decir, en el conjunto de los elementos maximales de de A.

De manera análoga, podemos definir una función monótona decreciente y estrictamente decreciente con el orden de Pareto.

Definición 4.21. Decimos que una función $f : (X, \preceq) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona decreciente cuando satisface: $z_1 \preceq z_2 \Longrightarrow f(z_1) \geq f(z_2)$. Por ejemplo, si $(X, \preceq)$ es un subconjunto del plano con el orden de Pareto, quiere decir que:

$$z_1 = (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) = z_2 \Longrightarrow f(z_1) = f(x_1, y_1) \geq f(x_2, y_2) = f(z_2)$$

Ejemplo 4.22. Dos ejemplos:

(1) $f(x, y) = Ax + By$, es monótona decreciente si y solo si $\max(A, B) \leq 0$.
(2) $f(x, y) = -x^\alpha \cdot y^\beta$, definida en $[0, \infty) \times [0, \infty)$ es monótona decreciente cuando $\alpha, \beta > 0$.

Con respecto a las funciones estrictamente decrecientes, hay varias definiciones posibles. La más utilizada en el caso del orden de Pareto es:

Definición 4.23. Decimos que una función $f : (A, \preceq_P) \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, con $A \subset \mathbb{R}^2$, cuando satisface:

$$z_1 = (x_1, y_1) \preceq_P (x_2, y_2) = z_2,\ z_1 \neq z_2 \Longrightarrow f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2)$$

Ejemplo 4.24. Dos ejemplos:

(1) $f(x, y) = Ax + By$, es estrictamente decreciente si $max(A, B) < 0$.
(2) Por otro lado, $f(x, y) = -x^\alpha \cdot y^\beta$, definida en $(0, \infty) \times (0, \infty)$, es también una función estrictamente decreciente cuando $\alpha, \beta > 0$.

Teorema 4.25. Sea f una función definida en $A \subset \mathbb{R}^2$, con el orden de Pareto.

a) Si f es una función monótona decreciente y A es un conjunto acotado superiormente por sus elementos maximales, el mínimo de f se alcanzará en alguno de los puntos maximales de A y, quizá, en algún otro punto de A que no sea un punto maximal.
b) Si f es estrictamente decreciente y alcanza su mínimo global, este mínimo solamente se obtendría en un punto del conjunto de los elementos maximales de A.

Ejemplo 4.26.

(1) Si f es una función constante, el mínimo se obtendrá en todos los puntos de A. Por lo tanto, en todos los elementos maximales de A suponiendo que exista alguno.

(2) Si f es una función continua, estrictamente decreciente, definida en

$$A = \{(x, y) : x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\},$$

entonces f alcanzará su mínimo global en el conjunto $B = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1\}$, es decir, en el conjunto de los elementos maximales de A.