$\boxed{1}$

Se considera la función $f(x,y) = \sqrt{x+2y}$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq x, x \leq 2\}.$$

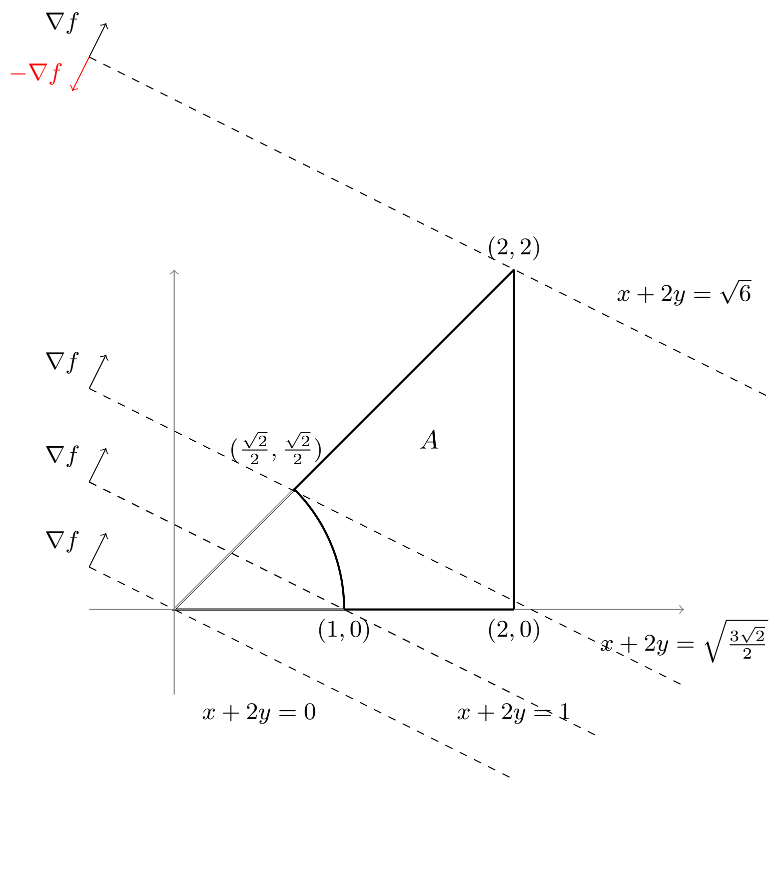
(a) (6 puntos) Dibujar el conjunto A y discutir si la función f y el conjunto A satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass.

(b) (6 puntos) Dibujar algunas curvas de nivel f superpuestas en el conjunto A, mostrando las direcciones en las que f crece o decrece, y determinar (si existen) los extremos globales de f en A.

Solución:

(a) La función f es continua en $\mathbb{R}^2_+$, luego continua en A. El conjunto A es cerrado, dado que contiene a su frontera y es acotado, dado que $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+x^2} \leq \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$, para todo $(x,y) \in A$. Por tanto, las hipótesis del Teorema de Weierstrass se satisfacen. Se ha representado el conjunto A y algunas de las curvas de nivel de f, así como su gradiente, en la figura de más abajo.

(b) Las curvas de nivel de f son las rectas $x+2y=k$, donde $k \geq 0$, que tienen pendiente $-\frac{1}{2}$. El gradiente de f is $(1,2)$ en todo punto, y muestra la dirección de más rápido crecimiento de f (luego $(-1,-2)$ es la dirección de más rápido descenso de f). Por tanto, $(2,2)$, que es la intersección de $x=2$ con $y=x$, es el máximo global, y $(1,0)$, que es la intersección de $y=0$ con $x^2+y^2=1$, es el mínimo global.



$\boxed{2}$

Una firma vende dos bienes en cantidades x y y, respectivamente.

(a) (6 puntos) Sabiendo que la función de beneficios de la empresa es

$$B(x,y) = -4x^2 - 24y^2 + 800x + 960y - 500,$$

calcular los puntos críticos y estudiar si son máximos globales.

(b) (6 puntos) Suponga ahora que la empresa no está segura de la forma exacta de su función de beneficios. Concretamente, la empresa estima que la función de beneficios es

$$B(x,y) = -4x^2 - 24y^2 + 4axy + 800x + 960y - 500, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Determinar el o los intervalos I de valores de a para los que esta función de beneficios es estrictamente cóncava.

Solución:

(a) Para hallar los puntos críticos resolveremos el sistema $\nabla B(x,y) = (0,0)$, es decir,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -8x + 800 = 0,$$
$$\frac{\partial B}{\partial y} = -48y + 960 = 0.$$

La solución es única, dada por $(x,y) = (100,20)$. La Hessiana de f es

$$\mathcal{H}B(x,y) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix},$$

que es definida negativa para todo x, y, luego B es estrictamente cóncava. Entonces (100,20) es un máximo global.

(b) En este caso, $\nabla B(x,y) = (-8x + 4ay + 800, -48y + 4ay + 960)$, y la Hessiana de B es ahora

$$\mathcal{H}B(x,y) = \begin{pmatrix} -8 & 4a \\ 4a & -48 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales son $D_1 = -8 < 0$ y $D_2 = 8 \cdot 48 - 16a^2 = 16(24 - a^2) < 0$ sii $a^2 < 24$, sii $|a| < \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, sii $a \in (-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}) = I$.

$\boxed{3}$

Se considera la función $f(x, y) = 12x\sqrt{y}$ definida sobre el conjunto $\{(x, y) : 3x + 4y = 12, y > 0\}$.

(a) (6 puntos) Obtener las ecuaciones de Lagrange y determinar los puntos críticos.

(b) (6 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado (a).

(c) (6 puntos) Suponga que la restricción cambia a $3x + 4y = 13$. Sin resolver el nuevo problema, d una estimación del valor óptimo de $f(x, y)$ tras este cambio.

Solución:

(a) La Lagrangiana es $L(x, y, \lambda) = 12x\sqrt{y} + \lambda(12 - 3x - 4y)$ y las ecuaciones de Lagrange son $\nabla L = (0, 0, 0)$, es decir

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 12\sqrt{y} - 3\lambda = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{12x}{2\sqrt{y}} - 4\lambda = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 12 - 3x - 4y = 0.$$

Despejando λ de la primera y de la segunda ecuación, $\lambda = \frac{12}{3}\sqrt{y} = \frac{12x}{8\sqrt{y}}$, encontramos que $y = \frac{3x}{8}$. Substituyendo esta relación en la restricción, $12 - 3x - \frac{4 \cdot 3x}{8} = 12 - \frac{36x}{8} = 0$ y resolviendo, $x = \frac{8}{3}$, $y = 1$. El multiplicador es $\lambda = \frac{12}{3}\sqrt{1} = 4$. La matriz Hessiana de L con respecto a (x, y) es

$$\mathcal{H}_{(x,y)}L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{\sqrt{y}} \\ \frac{6}{\sqrt{y}} & -\frac{3x}{\sqrt{y^3}} \end{pmatrix},$$

que tras evaluar en el punto $(\frac{8}{3}, 1, 4)$, es la matriz simétrica

$$\mathcal{H}_{(x,y)}L(8/3, 1, 4) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix},$$

que corresponde a una forma cuadrática indefinida. Restringimos dicha forma cuadrática al subespacio tangente, que viene dado por $\{(v_1, v_2) : \nabla g(\frac{8}{3}, 1) \cdot (v_1, v_2) = 0\}$. Dado que $\nabla g(x, y) = (3, 4)$ para todo x, y, el subespacio tangente está determinado por la ecuación $3v_1 + 4v_2 = 0$, de la que obtenemos $v_2 = -\frac{3}{4}v_1$. La forma cuadrática de matriz $\mathcal{H}_{(x,y)}L(8/3, 1, 4)$ es definida negativa en el subesepacio tangente, ya que

$$(v_1, (-3/4)v_1) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{3}{4}v_1 \end{pmatrix} = -\frac{27}{2v_1^2} < 0.$$

Luego $(\frac{8}{3}, 1)$ es un máximo local.

(b) El multiplicador de Lagrange es la derivada de la función valor con respecto al término independiente de la restriccón. De la definición de derivada, tenemos

$$\Delta V \approx \lambda \cdot \Delta b,$$

donde ΔV denota el incremento (positivo o negativo) del valor óptimo y Δb denota el incremento (positivo o negativo) del término independiente de la restriccón. Dado que en el caso estudiado $\Delta b = 13 - 12 = 1$, tenemos que $\Delta V \approx 4$. Como el valor óptimo anterior era $f(\frac{8}{3}, 1) = 32$, el nuevo valor óptimo será aproximadamente 36.

$\boxed{4}$

Se considera la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + y - 1$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) (5 puntos) Encontrar las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn–Tucker del problema

$$\max f(x,y) \quad \text{sujeto a } (x,y) \in A.$$

(b) (13 puntos) Encontrar todas las soluciones de las condiciones de Kuhn–Tucker establecidas en el apartado (a) y encontrar el máximo de f en A.

Solución:

(a) La Lagrangiana es $L(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + y - 1 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$. Las condiciones necesarias de K–T son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2\lambda x = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 4y + 1 - 2\lambda y = 0,\\
\lambda\frac{\partial L}{\partial z} &= \lambda(1 - x^2 - y^2) = 0,\\
&\lambda \geq 0,\\
&1 - x^2 - y^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(b) Resolveremos el sistema de ecuaciones formado por igualdades, comprobando que las soluciones obtenidas cumplen el resto de condiciones de K–T. Primero suponemos que $\lambda > 0$. Entonces, $x^2 + y^2 = 1$. De la primera ecuación en (a), obtenemos que o bien $x = 0$ o $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces $y = 1$ o $y = -1$. Notar que $x = 0$ y $y = 1$ implican, tras substituir estos valores en la segunda ecuación de (a), que $\lambda = \frac{5}{2} > 0$. El punto $(0, 1, \frac{5}{2})$ cumple todas las condiciones de K–T. Consideramos ahora el caso $x = 0$ y $y = -1$. El multiplicador es $\lambda = \frac{3}{2} > 0$. Luego, también el punto $(0, -1, \frac{3}{2})$ satisface las condiciones de K–T. Supongamos ahora que $x \neq 0$, por lo que $\lambda = 1$. De la primera ecuación en (a), x es arbitrario, y de la segunda ecuación, vemos que $y = -\frac{1}{2}$ y tras substituir en la ecuación $x^2 = 1 - y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, tenemos dos posibilidades: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ o $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Luego, obtenemos dos nuevos puntos que cumplen K–T: $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.

Resta estudiar el caso con $\lambda = 0$. Claramente, $x = 0$ y $y = -\frac{1}{4}$, que da lugar a un nuevo punto: $(0, -\frac{1}{4}, 0)$.

Para determinar si alguno de los candidatos obtenidos es un máximo global (recordar que las condiciones de K–T tal y como las hemos aplicado localizan máximos, no mínimos), aplicaremos el Teorema de Weierstrass, por ser la función objetivo continua y el conjunto factible compacto. Por tanto, será suficiente evaluar f en los puntos obtenidos y seleccionar aquéllos donde f alcance el valor más alto.

$$\begin{aligned}
f(0,1) &= 2,\\
f(0,-1) &= 0,\\
f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{9}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4},\\
f\left(0, -\frac{1}{4}\right) &= 2\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

El máximo global se alcanza en el punto $(0,1)$.