

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos	12	12	18	18	60
Nota					

Instrucciones:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 90'.**
- **No está permitido** el uso de calculadoras. **Apague** su teléfono.
- **No desgrape** el examen.
- Por favor, muestre un documento de identificación válido si se le es requerido.
- Lea el examen cuidadosamente. El examen consta de 4 ejercicios, para un máximo de 60 puntos.
- Justifique todas sus respuestas.
- Al escribir sus respuestas y para realizar sus cálculos, puede utilizar también la última página del examen (dos caras).

1

Se considera la función $f(x, y) = \sqrt{x + 2y}$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq x, x \leq 2\}.$$

- (a) (6 puntos) Dibujar el conjunto A y discutir si la función f y el conjunto A satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass.
 - (b) (6 puntos) Dibujar algunas curvas de nivel f superpuestas en el conjunto A , mostrando las direcciones en las que f crece o decrece, y determinar (si existen) los extremos globales de f en A .
-

2

Una firma vende dos bienes en cantidades x y y , respectivamente.

- (a) (6 puntos) Sabiendo que la función de beneficios de la empresa es

$$B(x, y) = -4x^2 - 24y^2 + 800x + 960y - 500,$$

calcular los puntos críticos y estudiar si son máximos globales.

- (b) (6 puntos) Suponga ahora que la empresa no está segura de la forma exacta de su función de beneficios. Concretamente, la empresa estima que la función de beneficios es

$$B(x, y) = -4x^2 - 24y^2 + 4axy + 800x + 960y - 500, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Determinar el o los intervalos I de valores de a para los que esta función de beneficios es estrictamente cóncava.

3

Se considera la función $f(x, y) = 12x\sqrt{y}$ definida sobre el conjunto $\{(x, y) : 3x + 4y = 12, y > 0\}$.

- (a) (6 puntos) Obtener las ecuaciones de Lagrange y determinar los puntos críticos.
 - (b) (6 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado (a).
 - (c) (6 puntos) Suponga que la restricción cambia a $3x + 4y = 13$. Sin resolver el nuevo problema, dé una estimación del valor óptimo de $f(x, y)$ tras este cambio.
-

4

Se considera la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + y - 1$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- (a) (5 puntos) Encontrar las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn–Tucker del problema

$$\max f(x, y) \quad \text{sueto a } (x, y) \in A.$$

- (b) (13 puntos) Encontrar todas las soluciones de las condiciones de Kuhn–Tucker establecidas en el apartado (a) y encontrar el máximo de f en A .
-

