UC3M
Optimización Matemática para la Economía
Examen Final
31 de mayo de 2021 **Soluciones**

$\boxed{1}$

Se considera la función $f(x,y) = -\ln(x^2+y^2)$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \leq 4, x+y \leq 2, x-y \leq 2\}.$$

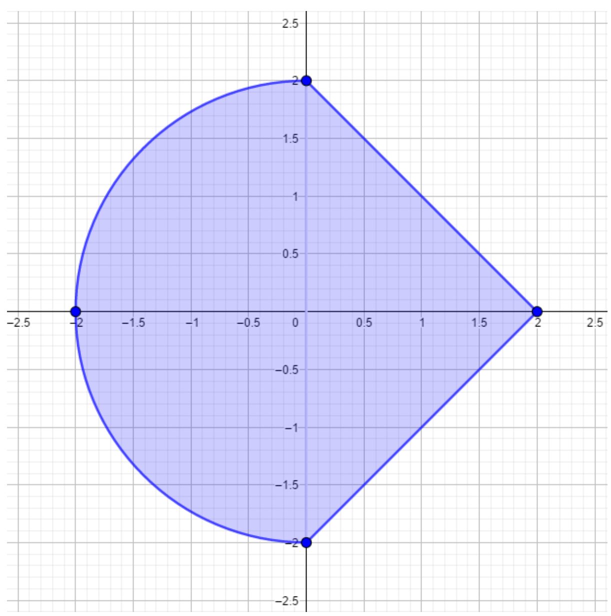
(a) (6 puntos) Dibujar el conjunto A y discutir si la función f y el conjunto A satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass. ¿Puede asegurarse la existencia de extremos globales de f en A?

(b) (6 puntos) Dibujar las curvas de nivel -1, 0 and 1 de f en el plano, mostrando las direcciones en las que f crece o decrece y determinar (si existen) los extremos globales de f en A. En el caso de que no existan, justificar lar respuesta.

Solución:

(a) El conjunto A está formado por todos aquellos puntos del plano cartesiano que se encuentran dentro de la región limitada por:

- La semicircunferencia centrada en el punto $(0,0)$ y de radio 2, comprendida entre los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$. Forman parte del conjunto los puntos situados dentro del semicírculo limitado por dicha semicircunferencia, así como los puntos de la propia semicircunferencia.
- La recta $y = 2 - x$. Forman parte del conjunto los puntos que quedan debajo de dicha recta, incluyendo el segmento que va desde el punto $(0,2)$ al punto $(2,0)$.
- La recta $y = -2 + x$. Forman parte del conjunto los puntos que quedan encima de dicha recta, incluyendo el segmento que va desde el punto $(0,-2)$ al punto $(2,0)$.



El conjunto A sí es cerrado (puesto que incluye su frontera) y acotado (se puede definir una bola con el radio adecuado para que lo incluya completamente), por lo que **sí es compacto**.

Pero la función f incluye un logaritmo neperiano, función que no está definida cuando el argumento es menor o igual a cero. Puesto que el argumento de la función es la suma de los cuadrados de cada una de las dos variables independientes, el único punto en el que la función $f(x,y)$ no está definida es el punto $(0,0)$, que sí pertenece al conjunto A. Por lo tanto, la función f **no es continua** en todo el conjunto A, y por ello, no se cumplen las hipótesis del Teorema de Weierstrass.

Esto supone que no se puede asegurar que esta función alcance máximo y mínimo global en este conjunto; pueden existir ambos valores, alguno de los dos o no existir ninguno de ellos.

(b) La familia de curvas de nivel de la función f está formada por las curvas que responden a la expresión:

$$-\ln\left(x^2+y^2\right)=k \Rightarrow \ln\left(x^2+y^2\right)=-k \Rightarrow x^2+y^2=e^{-k}=\frac{1}{e^k}$$

O sea, para cada valor de $k \in \mathbb{R}$, la curva de nivel correspondiente es una circunferencia centrada en el origen de coordenadas, y de radio $\frac{1}{\sqrt{e^k}}$, con lo que, al aumentar k, el radio va disminuyendo; o sea, el valor de la función crece cuando las curvas de nivel se van aproximando al origen de coordenadas.

De forma analítica, la dirección y sentido de crecimiento máximo de la función en cada punto de su dominio, viene dada por la orientación del vector gradiente en dicho punto. Cálculo del gradiente:

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\left(-\frac{2x}{x^2+y^2},-\frac{2y}{x^2+y^2}\right)$$

Cálculo del gradiente en los puntos $A=(-2,0)$, $B=(0,2)$, $C=(2,0)$ y $D=(0,-2)$:

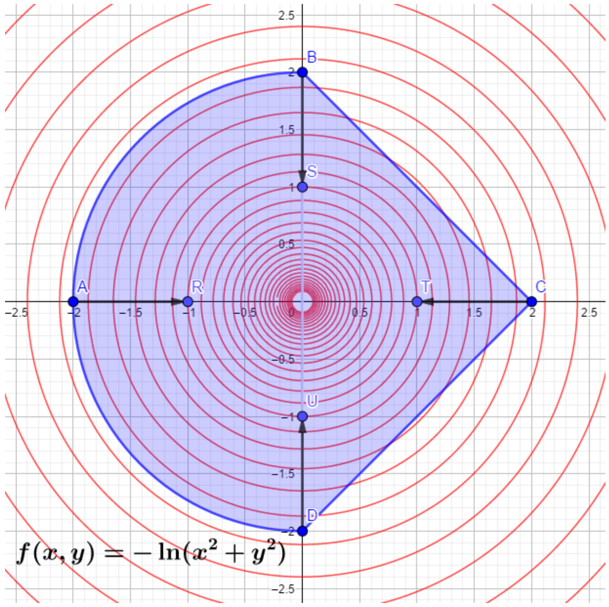
- $\nabla f(-2,0)=\left(-\frac{2\cdot(-2)}{4+0},-\frac{2\cdot 0}{4+0}\right)=\left(\frac{4}{4},0\right)=(1,0)$, lo que significa que el vector que representa dicho gradiente en ese punto es el vector con punto inicial en $(-2,0)$ y punto final en $(-1,0)$.

- $\nabla f(0,2)=\left(-\frac{2\cdot 0}{0+4},-\frac{2\cdot 2}{0+4}\right)=\left(0,-\frac{4}{4}\right)=(0,-1)$, lo que significa que el vector que representa dicho gradiente en ese punto es el vector con punto inicial en $(0,2)$ y punto final en $(0,1)$.

- $\nabla f(2,0)=\left(-\frac{2\cdot 2}{4+0},-\frac{2\cdot 0}{4+0}\right)=\left(\frac{-4}{4},0\right)=(-1,0)$, lo que significa que el vector que representa dicho gradiente en ese punto es el vector con punto inicial en $(2,0)$ y punto final en $(1,0)$.

- $\nabla f(0,-2)=\left(-\frac{2\cdot 0}{0+4},-\frac{2\cdot(-2)}{0+4}\right)=\left(0,\frac{4}{4}\right)=(0,1)$, lo que significa que el vector que representa dicho gradiente en ese punto es el vector con punto inicial en $(0,-2)$ y punto final en $(0,-1)$.

Se han representado los cuatro gradientes sobre el gráfico de las curvas de nivel de f y el conjunto A.



Se ve claramente que la función siempre crece hacia el origen de coordenadas. Por ello, el máximo de la función restringida al conjunto dado, estará situado en aquel punto (o en aquellos puntos, puesto que puede haber más de uno) que, perteneciendo al conjunto, toque la curva de nivel situada lo más cercana posible al origen de coordenadas. Pero la función no está definida en el origen de coordenadas, y, cuando nos acercamos a ese punto desde cualquier dirección, la función tiende hacia $+\infty$. Por ello, para cualquier punto del conjunto, diferente a $(0, 0)$, y tan próximo a él como se quiera, siempre se puede encontrar otro punto aún más cercano a dicho punto y en el que, por lo tanto, la función alcanzará un valor mayor. La función no está acotada superiormente, y por lo tanto, no existe máximo de f en el conjunto A.

En cuanto al mínimo, hay que buscarlo en los puntos del conjunto más alejados del origen de coordenadas; se trata de buscar el punto (o los puntos, puesto que puede haber más de uno) que, perteneciendo al conjunto, toque la curva de nivel situada lo más lejos posible del origen de coordenadas. Puesto que las curvas de nivel son circunferencias centradas en el origen de coordenadas, se ve que hay infinitos máximos globales, que son todos los puntos de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$ con $x \leq 0$ (o sea, el arco de circunferencia que va desde el punto $(0, -2)$ al punto $(0, 2)$, incluyendo estos dos puntos), más el punto $(2, 0)$.

El valor de la función en esos puntos, y por lo tanto, el mínimo de $f(x, y)$ en el conjunto A es: $f(x, y) = -\ln(4)$.

$\boxed{2}$

Se considera la función

$$f(x,y) = e^{1+ax^2+by^2},$$

donde a y b son parámetros, ambos distintos de 0.

(a) (6 puntos) Encontrar los puntos críticos de f.

(b) (6 puntos) Para cada uno de los puntos críticos hallados en el apartado anterior, determinar el rango de valores de los parámetros a yb, para los cuales el punto crítico estudiado es

- Un máximo local.
- Un mínimo local.
- Un punto de silla.

Solución:

(a) Puntos críticos: aquellos en los que la función no es diferenciable o en los que el gradiente de la función es igual a cero:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = (e^{1+ax^2+by^2}\cdot 2ax, e^{1+ax^2+by^2}\cdot 2by)$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2ax\cdot e^{1+ax^2+by^2} = 0 \\ 2by\cdot e^{1+ax^2+by^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\},$$

dado que tanto a como b son distintos de 0. Por tanto, independientemente del valor de los parámetros a y b, solamente hay un punto crítico, que es el $(0,0)$

(b) Para clasificar el punto crítico, hay que analizar las condiciones de segundo orden, por lo que el primer paso es calcular la matriz Hessiana de $f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = e^{1+ax^2+by^2}\cdot(2ax)^2 + e^{1+ax^2+by^2}\cdot 2a = 2\cdot a\cdot e^{1+ax^2+by^2}(2ax^2+1)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = 2ax\cdot e^{1+ax^2+by^2}\cdot 2by = 4\cdot a\cdot b\cdot x\cdot y\cdot e^{1+ax^2+by^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = e^{1+ax^2+by^2}\cdot(2by)^2 + e^{1+ax^2+by^2}\cdot 2b = 2\cdot b\cdot e^{1+ax^2+by^2}(2by^2+1)$$

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cdot a\cdot e^{1+ax^2+by^2}(2ax^2+1) & 4\cdot a\cdot b\cdot x\cdot y\cdot e^{1+ax^2+by^2} \\ 4\cdot a\cdot b\cdot x\cdot y\cdot e^{1+ax^2+by^2} & 2\cdot b\cdot e^{1+ax^2+by^2}(2by^2+1) \end{pmatrix}$$

Particularizando en el punto crítico que hay que analizar, que es el $(0,0)$:

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2a\cdot e & 0 \\ 0 & 2b\cdot e \end{pmatrix}$$

Aplicando las condiciones suficientes de segundo orden:

- Si $\mathrm{H}f(0,0)$ es definida negativa, se puede asegurar que el punto $(0,0)$ es un máximo local estricto. Puesto que $\mathrm{H}f(0,0)$ es una matriz diagonal, será definida negativa cuando los dos elementos de la diagonal sean negativos, o sea, cuando $a < 0$ y $b < 0$ (puesto que $e > 0$).
- Si $\mathrm{H}f(0,0)$ es definida positiva, se puede asegurar que el punto $(0,0)$ es un mínimo local estricto. Puesto que $\mathrm{H}f(0,0)$ es una matriz diagonal, será definida positiva cuando los dos elementos de la diagonal sean positivos, o sea, cuando $a > 0$ y $b > 0$.
- Si $\mathrm{H}f(0,0)$ es indefinida, se puede asegurar que el punto $(0,0)$ es un punto de silla. Puesto que $\mathrm{H}f(0,0)$ es una matriz diagonal, será indefinida cuando los dos elementos de la diagonal tengan signos opuestos, o sea, cuando $a \cdot b < 0$.

$\boxed{3}$

Se considera el problema de Lagrange:

$$\text{Opt. } f(x,y) = 2x^3 - y^3 \quad \text{s.a: } x^2 + y^2 = 5$$

(a) (3 puntos) Obtener las ecuaciones de Lagrange.

(b) (6 puntos) Encontrar los puntos críticos de la función Lagrangiana.

(c) (3 puntos) Hallar, si existen, el máximo y el mínimo global de f en A.

(d) (6 puntos) Suponga que la función objetivo f no cambia, pero la restricción pasa a ser $x^2+y^2 = 5.1$. Es decir, el nuevo problema de Lagrange es:

$$\text{Opt. } f(x,y) = 2x^3 - y^3 \quad \text{s.t.: } x^2 + y^2 = 5.1.$$

Sin resolver este problema de nuevo, calcular de forma aproximada el valor óptimo de $f(x,y)$ tras este cambio en la restricción.

Solución:

(a) La Lagrangiana es $L(x,y,\lambda) = 2x^3 - y^3 + \lambda(5 - x^2 - y^2)$ y las ecuaciones de Lagrange son

(i) $6x^2 - 2\lambda x = 0 \to 2x(3x - \lambda) = 0$

(ii) $-3y^2 - 2\lambda y = 0 \to -y(3y + 2\lambda) = 0$

(iii) $x^2 + y^2 = 5$

(b) Resolvemos las ecuaciones de Lagrange para encontrar los puntos críticos.

Si $x = 0$ en (i), entonces de (iii) $y = \pm\sqrt{5}$.

Si $y = 0$ en (ii), entonces de (iii) $x = \pm\sqrt{5}$.

Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces (i) $3x - \lambda = 0 \to \lambda = 3x$ y (ii) $3y + 2\lambda = 0 \to \lambda = -\frac{3y}{2}$. Igualando los dos valores de λ, obtenemos $y = -2x$. Sustituyendo esta igualdad en (iii) $x^2 + (-2x))^2 = 5 \to 5x^2 = 5 \to x = \pm 1$.

Luego, hay 6 puntos críticos, con los multiplicadores asociados

Punto crítico 1 $(0, \sqrt{5})$, $\lambda = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Punto crítico 2 $(0, -\sqrt{5})$, $\lambda = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Punto crítico 3 $(\sqrt{5}, 0)$, $\lambda = 3\sqrt{5}$.

Punto crítico 4 $(-\sqrt{5}, 0)$, $\lambda = -3\sqrt{5}$.

Punto crítico 5 $(1, -2)$, $\lambda = 3$.

Punto crítico 6 $(-1, 2)$, $\lambda = -3$.

(c) El conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 5\}$ ies compacto y la función $f(x,y) = 2x^3 - y^3$ es continua, por tanto evaluamos la función en los puntos críticos y seleccionamos el máximo y el mínimo global.

El máximo global se obtiene en el punto 3, con $f(\sqrt{5}, 0) = 10\sqrt{5}$.

El mínimo global se obtiene en el punto 4, con $f(-\sqrt{5}, 0) = -10\sqrt{5}$.

(d) El máximo global es $(\sqrt{5}, 0)$, donde $f(\sqrt{5}, 0) = 10\sqrt{5}$. Cuando el término independiente b cambia de 5 a 5.1, tenemos

$$\Delta \text{ valor óptimo } \approx \lambda \Delta b = 3\sqrt{5}(5.1 - 5) = (0.3)\sqrt{5}.$$

En consecuencia, el nuevo valor óptimo es aproximadamente $10\sqrt{5} + 0.3\sqrt{5} = (10.3)\sqrt{5}$.

$\boxed{4}$

Se considera la función $f(x,y) = \dfrac{x^4}{2} - y^4 + 2y^2$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x,y) \, : \, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(a) (6 puntos) Establecer las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn–Tucker para el problema

$$\max f(x,y) \quad \text{sujeto a } (x,y) \in A.$$

(b) (9 puntos) Hallar todas las soluciones de las condiciones de Kuhn–Tucker establecidas en el apartado anterior.

(c) (3 puntos) Hallar el máximo global def f en A.

Solución:

(a) La Lagrangiana es $L(x,y,\lambda) = \dfrac{x^4}{2} - y^4 + 2y^2 + \lambda(4 - x^2 - y^2)$. La condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn–Tucker son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x^3 - 2\lambda x = 2x(x^2 - \lambda) = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= -4y^3 + 4y - 2\lambda y = 2y(-2y^2 + 2 - \lambda) = 0,\\
\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \lambda(4 - x^2 - y^2) = 0,\\
&\lambda \geq 0,\\
&4 - x^2 - y^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(b) Para hallar los punto críticos resolvemos el sistema de ecuaciones

(i) $2x(x^2 - \lambda) = 0$
(ii) $2y(-2y^2 + 2 - \lambda) = 0$
(iii) $\lambda(4 - x^2 - y^2) = 0$.

Se encuentran las siguientes soluciones (x,y) and λ (no todas ellas satisfacen las condiciones de K–T):

(1) $(0,0)$ con $\lambda = 0$.
(2) $(0,\pm 1)$ con $\lambda = 0$, dado que tanto (i) como (iii) se cumplen y (ii) es $-2y^2 + 2 - \lambda = -2 + 2 = 0$.
(3) $(0,\pm 2)$ con $\lambda = -6$, dado que $x = 0$ implica en (iii) que $y = \pm 2$ y entonces de (ii) $\lambda = -2y^2 + 2 = -8 + 2 = -6$
(4) $(\pm 2, 0)$ con $\lambda = 4$, dado que $y = 0$ implica en (iii) $x = \pm 2$ y entonces de (i) $\lambda = x^2 = 4$.

No existen soluciones con $x > 0$ y $y > 0$. razonando por reducción al absurdo, si este fuera el caso, entonces tendríamos de (i) $\lambda = x^2 > 0$ y de (ii) $\lambda = 2 - 2y^2$, luego $x^2 = 2 - 2y^2$. Entonces, dado que la restricción se satura en el punto porque $\lambda > 0$, tendríamos $x^2 + y^2 = 2 - 2y^2 + y^2 = 4$ y por tanto $-y^2 = 2$, que es imposible. Eliminamos el caso (2) dado que $\lambda < 0$.

En resumen, satisfacen K–T los puntos: $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, y$(\pm 2, 0)$.

(c) Dado que f es continua y A es compacto, podemos aplicar el Teorema de Weierstrass para concluir que f alcanza su máximo global en A. Al evaluar, obtenemos $f(0,0) = 0$, $f(0,\pm 1) = 1$ y $f(\pm 2, 0) = 8$, luego $(\pm 2, 0)$ son los puntos donde f alcanza su valor máximo entre todos los puntos de A.