UC3M
Optimización Matemática para la Economía
Examen Final
31 de mayo de 2021

Niu: ____________ Grupo: ______

Nombre y apellidos: ______________________

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos	12	12	18	18	60
Nota					

Instrucciones:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 90'**.
- **No está permitido** el uso de calculadoras.
- **Apague** su teléfono.
- **No desgrape** el examen.
- Por favor, muestre un documento de identificación válido si se le es requerido.
- Lea el examen cuidadosamente. El examen consta de 4 ejercicios, para un máximo de 60 puntos.
- Justifique todas sus respuestas.

$\boxed{1}$

Se considera la función $f(x, y) = -\ln(x^2 + y^2)$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4, x + y \leq 2, x - y \leq 2\}.$$

(a) (6 puntos) Dibujar el conjunto A y discutir si la función f y el conjunto A satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass. ¿Puede asegurarse la existencia de extremos globales de f en A?

(b) (6 puntos) Dibujar las curvas de nivel -1, 0 and 1 de f en el plano, mostrando las direcciones en las que f crece o decrece y determinar (si existen) los extremos globales de f en A. En el caso de que no existan, justificar lar respuesta.

$\boxed{2}$

Se considera la función

$$f(x, y) = e^{1+ax^2+by^2},$$

donde a y b son parámetros, ambos distintos de 0.

(a) (6 puntos) Encontrar los puntos críticos de f.

(b) (6 puntos) Para cada uno de los puntos críticos hallados en el apartado anterior, determinar el rango de valores de los parámetros a yb, para los cuales el punto crítico estudiado es

- Un máximo local.
- Un mínimo local.
- Un punto de silla.

$\boxed{3}$

Se considera el problema de Lagrange:

$$\text{Opt. } f(x,y) = 2x^3 - y^3 \quad \text{s.a: } x^2 + y^2 = 5$$

(a) (3 puntos) Obtener las ecuaciones de Lagrange.

(b) (6 puntos) Encontrar los puntos críticos de la función Lagrangiana.

(c) (3 puntos) Hallar, si existen, el máximo y el mínimo global de f en A.

(d) (6 puntos) Suponga que la función objetivo f no cambia, pero la restricción pasa a ser $x^2+y^2 = 5.1$. Es decir, el nuevo problema de Lagrange es:

$$\text{Opt. } f(x,y) = 2x^3 - y^3 \quad \text{s.a: } x^2 + y^2 = 5.1.$$

Sin resolver este problema de nuevo, calcular de forma aproximada el valor óptimo de $f(x,y)$ tras este cambio en la restricción.

$\boxed{4}$

Se considera la función $f(x, y) = \dfrac{x^4}{2} - y^4 + 2y^2$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(a) (6 puntos) Establecer las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn–Tucker para el problema

$$\max f(x, y) \quad \text{sujeto a } (x, y) \in A.$$

(b) (9 puntos) Hallar todas las soluciones de las condiciones de Kuhn–Tucker establecidas en el apartado anterior.

(c) (3 puntos) Hallar el máximo global def f en A.
