UC3M
Optimización Matemática para la Economía
Examen Final
27 junio 2019

Niu: ______________ Grupo: ______

Nombre y apellidos: ______________________________

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos	12	12	18	18	60
Nota					

Instrucciones:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 90'**.
- **No está permitido** el uso de calculadoras. **Apague** su teléfono.
- **No desgrape** el examen.
- Por favor, muestre un documento de identificación válido si se le es requerido.
- Lea el examen cuidadosamente. El examen consta de 4 ejercicios, para un máximo de 60 puntos.
- Justifique todas sus respuestas.
- Al escribir sus respuestas y para realizar sus cálculos, puede utilizar también la última página del examen (dos caras).

$\boxed{1}$

Se considera la función $f(x, y) = (x - 2y)^2$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) \,:\, x + y \geq 0, y \leq 3, x \leq 3\}.$$

(a) (6 puntos) Dibujar el conjunto A y discutir si la función f y el conjunto A satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass.

(b) (6 puntos) Dibujar algunas curvas de nivel de f superpuestas al conjunto A, mostrando las direcciones en las que f crece o decrece y determinar (si existen) los extremos globales de f en A.

$\boxed{2}$

Una firma vende dos bienes A y B en cantidades x y y, respectivamente. Los ingresos de la empresa están dados por la función

$$R(x, y) = 800x + 960y - 2x^2 - 12y^2 + 4axy,$$

donde a es un parámetro desconocido. El coste de producir x unidades del bien A y y unidades del bien B está dado por la función

$$C(x, y) = 2x^2 + 12y^2.$$

(a) (6 puntos) Hallar la función de beneficios de la empresa $B(x, y)$ y determinar todos los valores de a para los que $B(x, y)$ es estrictamente cóncava.

(b) (6 puntos) Suponga que la empresa sabe que $a = 2$. Calcular los puntos críticos de la función de beneficios $B(x, y)$ en este caso y calcular la producción que maximiza beneficios, si es que existe.

$\boxed{3}$

Sea $M = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$ y $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + 2yz$.

(a) (6 puntos) Obtener las ecuaciones de Lagrange y encontrar los puntos críticos del problema que consiste en minimizar f sobre el conjunto M.

(b) (6 puntos) Demostrar que existe un único mínimo global de f restringido a M, y encontrar el valor mínimo de f en M.

(c) (6 puntos) Sea $N = \{(x, y, z) : x + y + z = 0.5\}$. Sin resolver el problema con la nueva restricción, estimar el valor mínimo de f sobre N.

$\boxed{4}$

Se considera la función $f(x, y) = 10xy$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) \,:\, x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

(a) (6 puntos) Escribir las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn–Tucker del problema

$$\max f(x, y) \quad \text{sujeto a } (x, y) \in A.$$

(b) (6 puntos) Encontrar todas las soluciones de las condiciones de Kuhn–Tucker establecidas en el apartado (a).

(c) (6 puntos) Determinar el máximo de f en A. ¿Es $(0, 0)$ el minimizador de f en A?
