**UC3M**
**Optimización Matemática para la Economía**
**Examen Final**
**27 junio 2019**

**Soluciones**

$\boxed{1}$

Se considera la función $f(x,y) = (x-2y)^2$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x,y) : x+y \geq 0, y \leq 3, x \leq 3\}.$$

(a) (6 puntos) Dibujar el conjunto $A$ y discutir si la función $f$ y el conjunto $A$ satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass.

(b) (6 puntos) Dibujar algunas curvas de nivel de $f$ superpuestas al conjunto $A$, mostrando las direcciones en las que $f$ crece o decrece y determinar (si existen) los extremos globales de $f$ en $A$.

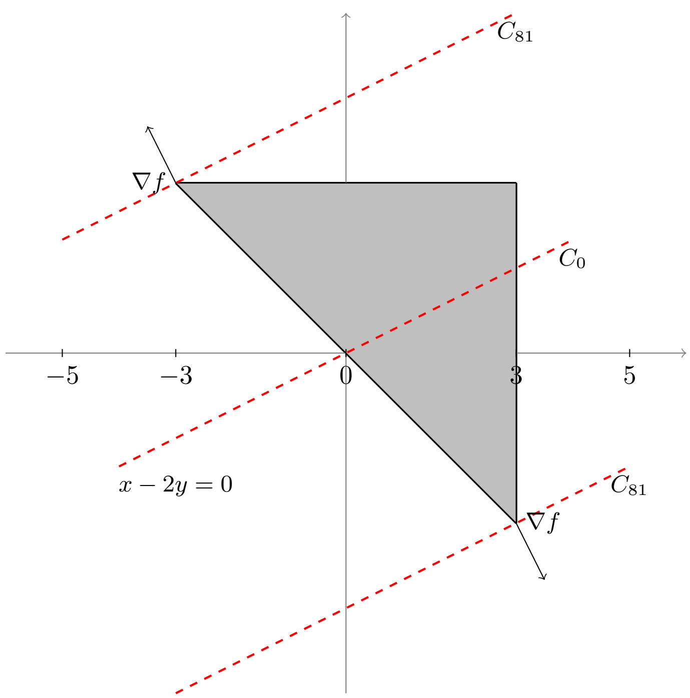
---

**Solución:**

(a) La función $f$ es continua en $\mathbb{R}^2_+$, luego continua en $A$. El conjunto $A$ es cerrado, dado que contiene a su frontera y es acotado, dado que $x+y \geq 0$ implica $x \geq -y$, y $y \leq 3$ entonces implica $x \geq -3$. Luego, $|x| \leq 3$; la misma cota se obtiene para $|y|$. Por tanto, las hipótesis del Teorema de Weierstrass se satisfacen. Se ha representado el conjunto $A$ y algunas de las curvas de nivel de $f$, así como su gradiente, en la figura de más abajo.

(b) Las curvas de nivel de $f$ son las rectas $(x-2y)^2 = k^2$, donde $k \in \mathbb{R}$. Cada curva de nivel está formada por dos rectas $x - 2y = \pm k$ con pendiente $-\frac{1}{2}$ (excepto si $k = 0$, que es una única recta). Dado que $\nabla f(x,y) = 2(x-2y)(1,-2)$, la dirección de más rápido crecimiento de $f$ es $(1,-2)$ si $x > 2y$ y $(-1,2)$ si $x < 2y$.

Por tanto $(3,-3)$ y $-3,3)$ son máximos globales, con $f(3,-3) = f(-3,3) = 81$. Los mínimos globales se obtienen en los puntos del segmento intersección de la recta $x - 2y = 0$ con el conjunto $A$, con un valor de 0.



$\boxed{2}$

Una firma vende dos bienes A y B en cantidades $x$ y $y$, respectivamente. Los ingresos de la empresa están dados por la función

$$R(x,y) = 800x + 960y - 2x^2 - 12y^2 + 4axy,$$

donde $a$ es un parámetro desconocido. El coste de producir $x$ unidades del bien A y $y$ unidades del bien B está dado por la función

$$C(x,y) = 2x^2 + 12y^2.$$

(a) (6 puntos) Hallar la función de beneficios de la empresa $B(x,y)$ y determinar todos los valores de $a$ para los que $B(x,y)$ es estrictamente cóncava.

(b) (6 puntos) Suponga que la empresa sabe que $a = 2$. Calcular los puntos críticos de la función de beneficios $B(x,y)$ en este caso y calcular la producción que maximiza beneficios, si es que existe.

---

**Solución:**

(a) función de beneficios es

$$B(x,y) = R(x,y) - C(x,y) = 800x + 960y - 4x^2 - 24y^2 + 4axy.$$

Calculamos el gradiente $\nabla B(x,y) = (800 - 8x + 4ay, 960 - 48y + 4ax)$ y la matriz Hessiana

$$\mathcal{H}B(x,y) = \begin{pmatrix} -8 & 4a \\ 4a & -48 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales son $D_1 = -8 < 0$ y $D_2 = 8 \cdot 48 - 16a^2 = 16(24 - a^2) > 0$ sii $a^2 < 24$, sii $|a| < \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, sii $a \in (-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$.

(b) Los puntos críticos quedan determinados por la anulación del gradiente, $\nabla B(x,y) = (0,0)$, que en este caso es el sistema de ecuaciones (con $a = 2$)

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 800 - 8x + 8y = 0,$$
$$\frac{\partial B}{\partial y} = 960 - 48y + 8x = 0.$$

La solución es $(x,y) = (144, 44)$, que es por tanto el único punto crítico de $B(x,y)$. Por (a), $B$ es estrictamente cóncava, dado que $0 \leq a = 2 < 2\sqrt{6}$, luego $(144, 44)$ es la produción que proporciona el máximo global a $B$.

$\boxed{3}$

Sea $M = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$ y $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + 2yz$.

(a) (6 puntos) Obtener las ecuaciones de Lagrange y encontrar los puntos críticos del problema que consiste en minimizar $f$ sobre el conjunto $M$.

(b) (6 puntos) Demostrar que existe un único mínimo global de $f$ restringido a $M$, y encontrar el valor mínimo de $f$ en $M$.

(c) (6 puntos) Sea $N = \{(x, y, z) : x + y + z = 0.5\}$. Sin resolver el problema con la nueva restricción, estimar el valor mínimo de $f$ sobre $N$.

---

**Solución:**

(a) La Lagrangiana es$L(x, y, z, \lambda) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + 2yz + \lambda(1 - x - y - z)$ y las ecuaciones de Lagrange son $\nabla L = (0, 0, 0)$, es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 6x - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 6y + 2z - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z + 2y - \lambda = 0, \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

Resolviendo, $\lambda = 6x = 6y + 2z = 2z + 2y$, luego $y = 0$ y $x = \frac{\lambda}{6}$, $z = \frac{\lambda}{2}$. Substituting into the constraint we get $\frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda}{2} = 1$, or $\lambda = \frac{3}{2}$. Thus, $x = \frac{1}{4}$, $y = 0$ and $z = \frac{3}{4}$ is the only critical point (with $\lambda = \frac{3}{2}$).

(b) El multiplicador de Lagrange es la derivada de la función valor con respecto al término independiente de la restriccón. De la definición de derivada, tenemos

$$\Delta V \approx \lambda \cdot \Delta b,$$

donde $\Delta V$ denota el incremento (positivo o negativo) del valor óptimo y $\Delta b$ denota el incremento (positivo o negativo) del término independiente de la restriccón. Dado que $\Delta b = -0.5$ y que de los apartados (a) y (b) $\lambda = 1.5$, tenemos que $\Delta V \approx -0.75$. Como el valor óptimo anterior era 0.75, el nuevo valor óptimo será aproximadamente 0 (el valor exacto es 0.1875).

$\boxed{4}$

Se considera la función $f(x, y) = 10xy$ definida sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) (6 puntos) Escribir las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn–Tucker del problema

$$\max f(x, y) \quad \text{sujeto a } (x, y) \in A.$$

(b) (6 puntos) Encontrar todas las soluciones de las condiciones de Kuhn–Tucker establecidas en el apartado (a).

(c) (6 puntos) Determinar el máximo de $f$ en $A$. ¿Es $(0, 0)$ el minimizador de $f$ en $A$?

---

**Solución:**

(a) La Lagrangiana es $L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + y - 1 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$. Las condiciones necesarias de K–T son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2\lambda x = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 4y + 1 - 2\lambda y = 0,\\
\lambda\frac{\partial L}{\partial z} &= \lambda(1 - x^2 - y^2) = 0,\\
&\lambda \geq 0,\\
&1 - x^2 - y^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(b) En primer lugar resolvemos el sistema formado por las ecuaciones con igualdad y en segundo lugar comprobamos si éstas cumplen el resto de condiciones de Khun–Tucker (las desigualdades).

Caso 1. $x = 0$ or $y = 0$; entonces $x = y = 0$ y el resto de condiciones se cumplen con $\lambda = 0$. Recíprocamente, si $\lambda = 0$ es 0, entonces $(x, y) = (0, 0)$ satisface las igualdades de KT.

Caso 2. $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $\lambda > 0$; resolviendo las dos primeras ecuaciones en la condiciones de KT, $\lambda = 5y/x = 5x/2y$, luego $x^2 = 2y^2$. Dado que $\lambda > 0$, la tercera ecuación da $4y^2 = x^2 + 2y^2 = 1$, es decir, $y^2 = \frac{1}{4}$ y entonces $y = \pm\frac{1}{2}$. También, $x^2 = 2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, luego $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se han encontrado pues cuatro soluciones:

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right),$$

pero $\lambda = -\frac{5}{2}\sqrt{2} < 0$ para las que tienen coordenadas de signo opuesto, luego las descartamos. A los puntos $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$, les corresponde $\lambda = \frac{5}{2}\sqrt{2} > 0$.

(c) Para determinar los máximos globales de $f$ en $A$ recurriremos al Teorema de Weierstrass, cuyas hipótesis satisfacen obviamente $f$, por ser continua, y $A$ por ser cerrado y acotado (una elipse con su interior). Evaluamos la función y determinamos los puntos donde alcanza el valor mayor posible.

$$\begin{aligned}
&f(0, 0) = 0,\\
f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, los maximizadores son $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$. Es evidente que el otro punto que cumple KT, $(0, 0)$, no es un minimizador, ya que $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) < 0 = f(0, 0)$.