UC3M

Optimización Matemática para la Economía

Examen Final 3 de junio de 2024 **Soluciones**

$\boxed{1}$

Sean el conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad g(x) \le y \le h(x), \quad 2 \le x \le 4\right\},$$

siendo

$$g(x) = \ln(x-1), \quad h(x) = \frac{1}{x} + 2$$

y la función

$$f(x, y) = \ln\left(y + \frac{x}{2} - 1\right).$$

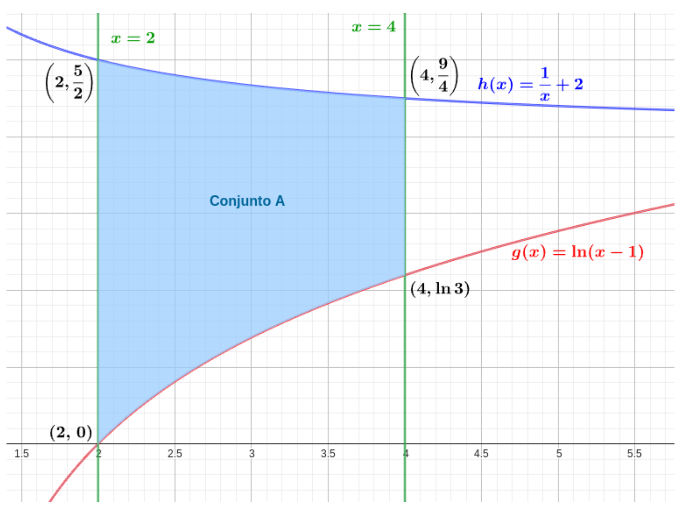
(a) (15 puntos) Representar gráficamente el conjunto A, de forma razonada. Considere el orden de Pareto definido sobre el conjunto A; hallar los maximales, minimales, máximo y mínimo de A. Razone las respuestas. Si encuentra que alguno de estos elementos no existe en A, razone por qué.

(b) (5 puntos) Razonar si la función f y el conjunto A satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass, y explicar lo que esto supone.

(c) (10 puntos) Utilizando las curvas de nivel de la función $f(x, y)$, y las direcciones de máximo crecimiento, identifique, dando un razonamiento gráfico, cuáles serían el maximizador y el minimizador globales de f en A.

Solución:

(a) La figura de más abajo se obtiene al tener en cuenta h es decreciente y g es creciente, que $h(2) = \frac{5}{2}$, $g(2) = \ln 1 = 0$, $h(4) = 3$ y $g(4) = \ln 3 < 3$. Luego, $g(x) < 3 = h(4) \le h(x)$, para todo $x \in [2, 4]$.



(b) Los maximales de A están rn la frontera superior del conjunto

$$\text{Maximal}(A) = \left\{(x, y) : \quad y = \frac{1}{x} + 2, \quad 2 \le x \le 4\right\}.$$

Por tanto, no hay máximo.

El punto $(2, 0) \in A$ es el mínimo de A y, por tanto, es el único punto minimal de A.

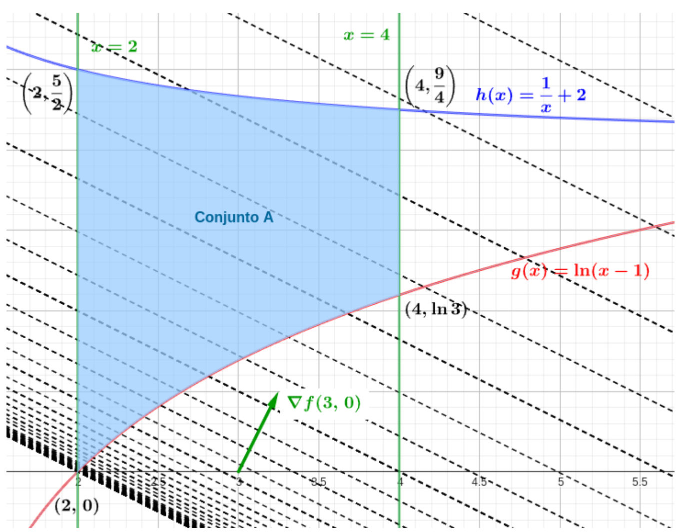
(c) A es cerrado ya que contiene a sus puntos frontera (dado que el conjunto está definido mediante desigualdades dbiles entre funciones continuas) y es acotado, ya que se puede encerrar en una bola centrada en $(0,0)$ y radio finito.

La función f es continua en su dominio. El dominio de f es el conjunto de puntos (x,y) que cumplen $y+\frac{x}{2}-1>0$. La expresión $y+\frac{x}{2}-1$ se anula en el punto $(2,0)\in A$, es negativa a la derecha de este punto, cuando $x>2$, y es positiva a la izquierda, cuando $x<2$. Pero los puntos de la recta $y+\frac{x}{2}=1$ con $x>2$ no pertenecen a A. Es decir, $(2,0)$ es el único punto de A que no está en el dominio de f. Eso es suficiente para tener que f no es continua en A y que por tanto no se cumplen las hipótesis del Teorema de Weierstrass. Podría suceder que la función f no alcanzara extremos globales en A.

(d) La curvas de nivel de f son las rectas dadas por

$$f(x)=\ln\left(y+\frac{x}{2}-1\right)=c\Rightarrow y+\frac{x}{2}-1=e^c\Rightarrow y=-\frac{x}{2}+1+e^c.$$

Las rectas de esta familia tienen todas pendiente $-\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen $1+e^c$.



Dado que $1+e^c$ es creciente en c, f crece cuando la ordenada en el origen crece, es decir, cuando las rectas de nivel se desplazan de forma paralela hacia el noreste. Claramente, $(4,\frac{9}{4})$es el máximo global de f en A, con $f(4,\frac{9}{4})=\ln\frac{13}{4}$. De forma similar, f decrece cuando la recta de nivel se desplaza paralelamente hacia el suroeste. Cuando $c\to-\infty$, $1+e^c$ decrece a 1, pero este valor límite nunca se alcanza. Luego, las curvas de nivel $y=-\dfrac{x}{2}+1+e^c$ convergen en este sentido a la recta $y=-\dfrac{x}{2}+1$, que pasa por $(2,0)$, donde la función f no está definida. De hecho, f decrece a $-\infty$ en el conjunto A cuando nos movemos en la dirección sureste, indicando que f no está acotada inferiormente en A y por tanto, no tiene mínimo global en A.

$\boxed{2}$

Se considera la función $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$.

(a) (10 puntos) Determinar los puntos críticos de f.

(b) (10 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior (máximos locales, mínimos locales o puntos de silla).

(c) (5 puntos) Determinar si alguno de los extremos locales de f hallados en el apartado anterior son también extremos globales.

Solución:

(a) $\nabla f(x,y) = (y(3-2x-y), x(3-x-2y)) = (0,0)$. Los puntos críticos son solución de este sistema de ecuaciones. Es fácil determinar que las soluciones son cuatro, $P=(0,0)$, $Q=(3,0)$, $R=(0,3)$ y $S=(1,1)$.

(b) La matriz Hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el signo de la Hessiana en los puntos críticos.

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

es indefinida, luego P es un punto de silla.

$$Hf(Q) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

es indefinida, luego Q es un punto de silla.

$$Hf(R) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

es indefinida, luego R es un punto de silla.

$$Hf(S) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

es definida negativa, luego S es un máximo local.

(c) Notar que $f(x,x) = 3x^2 - 2x^3$. Es sabido que los polinomios de grado impar toman todos los calores de la recta real, luego f no tiene extremos globales.

$\boxed{3}$

Se considera el problema siguiente:

$$\max \qquad f(x,y) = x^3 + y^3$$
$$\text{sujeto a:} \quad g(x,y) = x + 4y = 63$$

(a) (10 puntos) Formar la función Lagrangiana del problema y hallar sus puntos críticos.

(b) (10 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior (máximos locales, mínimos locales o puntos de silla).

(c) (5 puntos) Determinar si alguno de los extremos locales hallados en el apartado anterior son extremos globales de f sujetos a la restricción.

(d) (10 puntos) Supongamos ahora que la restricción cambia a $g(x,y) = 63$ y se añaden las condiciones de no negatividad sobre las variables, $x \geq 0$, $y \geq 0$. ¿Es posible que alguno de los extremos de f hallados en apartados anteriores sea extremo global de f sujeto a las nuevas restricciones?

Solución:

(a) La función de Lagrange de este problema es:

$L(x,y;\lambda) = x^3 + y^3 + \lambda(63 - x - 4y)$.

Las condiciones necesarias de Lagrange para que un punto (x,y) pueda ser optimizador local son:

i) $\partial L/\partial x(x,y;\lambda) = 3x^2 - \lambda = 0$

ii) $\partial L/\partial y(x,y;\lambda) = 3y^2 - 4\lambda = 0$

iii) $\partial L/\partial \lambda(x,y;\lambda) = 63 - x - 4y = 0$

Multiplicando la primera ecuación por 4 e igualando con la segunda, se obtiene:

$12x^2 = 4\lambda = 3y^2 \Longrightarrow y = 2x$ o $y = -2x$.

Sustituyendo x, y en la tercera ecuación:

i) $9x = 63 \Longrightarrow (x^*, y^*) = (7, 14)$.

ii) $-7x = 63 \Longrightarrow (x^*, y^*) = (-9, 18)$.

(b) Para saber si dichos puntos son maximizadores o minimizadores locales (o ninguna de las dos cosas), calculamos el Hessiano de L respecto a las variables x, y. Dicho Hessiano coincide con el de $f(x,y)$, al ser la restricción $g(x,y)$ lineal. Así pues:

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$; así pues, tenemos dos casos:

i) $Hf(7,14) = \begin{pmatrix} 42 & 0 \\ 0 & 84 \end{pmatrix}$ definida positiva para todo (v,w) distinto de $(0,0)$.

Luego el punto $(7,14)$ es un minimizador local de $f(x,y)$, cuando nos sometemos a la restricción.

ii) $Hf(-9,18) = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & 108 \end{pmatrix}$ indefinida para cualquier vector del plano, pero si consideramos que el subespacio tangente es $\{(v,w) : v + 4w = 0\} = \{(-4w, w)\}$, se deduce que:

$(-4w, w)\begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & 108 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4w \\ w \end{pmatrix} = -756w^2 < 0$, si $(v, w) \neq (0, 0)$

Luego dicho hessiano es definido negativo, y el punto $(-9, 18)$ es un maximizador local.

(c) Como $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x, y) = \infty$, cuando (x, y) cumple la restricción, $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x, y) = -\infty$, cuando (x, y) cumple la restricción, se deduce que no existe ni maximizador ni minimizador global.

(d) El punto $(7, 14)$ cumple la nueva restricción, y como el conjunto restricción es compacto, la función $f(x, y)$ debe hallar un máximo y mínimo global en dicho conjunto.

Para comprobar si $(7, 14)$ es minimizador global, debemos comparar con los puntos $(63, 0)$ y $(63/4, 0)$.

$f(63, 0) = 63^3 = 9^3 7^3 > 9.7^3 = 7^3 + 14^3 = f(7, 14)$,

$f(0, 63/4) = 63^3/4^3 = 9^3 7^3/64 > 9.7^3 = f(7, 14)$, pues simplificando obtenemos que $81 > 64$.

Luego $(7, 14)$ es el minimizador global.

$\boxed{4}$

Se considera el programa

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x^2 + 2y^2 + 2x - 4y \\ \text{s.a.} & y \leq x \\ & x \geq -y \end{array}$$

(a) (20 puntos) Obtenga las soluciones de las ecuaciones de Kuhn–Tucker correspondientes al programa.

(b) (10 puntos) Justifique que el programa tiene solución global.

Solución:

(a) Escribiendo el problema en forma estándar

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & -(x^2 + 2y^2 + 2x - 4y) \\ \text{s.a.} & -x + y \leq 0 \\ & -x - y \leq 0 \end{array}$$

El Lagrangiano es $L(x, y, \lambda_1, \mu) = -x^2 - 2y^2 - 2x + 4y + \lambda(x - y) + \mu(x + y)$

Las ecuaciones de K–T son las siguientes ecuaciones y desigualdades:

$$-2x - 2 + \lambda + \mu = 0 \tag{1}$$
$$-4y + 4 - \lambda + \mu = 0 \tag{2}$$
$$\lambda(x - y) = 0 \tag{3}$$
$$\mu(x + y) = 0 \tag{4}$$
$$-x + y \leq 0 \tag{5}$$
$$-x - y \leq 0 \tag{6}$$
$$\lambda, \mu \geq 0 \tag{7}$$

Resolviendo las primeras cuatro ecuaciones tenemos que:

- en la ecuacińn (3) la opción $x - y = 0$ da lugar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} -2x - 2 + \lambda + \mu &= 0 \\ -4x + 4 - \lambda + \mu &= 0 \\ \mu(x + y) &= 0 \end{aligned}$$

  Si $x + y = 0$ tenemos que $x = 0$ e $y = 0$ y $\mu = -1 < 0$ lo que contradice (7).
  Si $\mu = 0$ tenemos que resolviendo las dos primeras ecuaciones $x = \frac{1}{3}$ $y = \frac{1}{3}$ $\lambda = \frac{8}{3}$ y $\mu = 0$

- En la ecuación (3) la opción $\lambda = 0$ da lugar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} -2x - 2 + \mu &= 0 \\ -4y + 4 + \mu &= 0 \\ \mu(x + y) &= 0 \end{aligned}$$

Si $\mu = 0$ se obtiene que $x = -1$ $y = 1$ que no satisface (5).
Y si $x + y = 0$ queda

$$\begin{aligned} -2x - 2 + \mu &= 0 \\ 4x + 4 + \mu &= 0 \end{aligned}$$

y se obtiene $x = -1$ $y = 1$ que no satisface (5).

(b) El programa original es convexo porque la función objetivo es convexa

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

siendo $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x - 4y$, y como las desigualdades son lineales el conjunto factible es convexo. Por lo tanto la solución obtenida de las ecuaciones de K–T, $x = \frac{1}{3}$ $y = \frac{1}{3}$ $\lambda = \frac{8}{3}$ y $\mu = 0$, corresponde a un máximo global del programa estándar y a un mínimo global del programa original.

Nótese que dado que la región no es acotada no se puede aplicar el teorema de Weierstrass.