UC3M

Optimización Matemática para la Economía

Examen Final 3 de junio de 2024

Niu: _____ Group: _____

Nombre: _____

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos	30	25	35	30	120
Nota					

1

Sean el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x) \leq y \leq h(x), \quad 2 \leq x \leq 4\},$$

siendo

$$g(x) = \ln(x - 1), \quad h(x) = \frac{1}{x} + 2$$

y la función

$$f(x, y) = \ln\left(y + \frac{x}{2} - 1\right).$$

- (a) (15 puntos) Representar gráficamente el conjunto A , de forma razonada. Considere el orden de Pareto definido sobre el conjunto A ; hallar los maximales, minimales, máximo y mínimo de A . Razone las respuestas. Si encuentra que alguno de estos elementos no existe en A , razone por qué.
 - (b) (5 puntos) Razonar si la función f y el conjunto A satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass, y explicar lo que esto supone.
 - (c) (10 puntos) Utilizando las curvas de nivel de la función $f(x, y)$, y las direcciones de máximo crecimiento, identifique, dando un razonamiento gráfico, cuáles serían el maximizador y el minimizador globales de f en A .
-

2

Se considera la función $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$.

- (a) (10 puntos) Determinar los puntos críticos de f .
 - (b) (10 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior (máximos locales, mínimos locales o puntos de silla).
 - (c) (5 puntos) Determinar si alguno de los extremos locales de f hallados en el apartado anterior son también extremos globales.
-

3

Se considera el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x, y) = x^3 + y^3 \\ \text{sujeto a: } \quad & g(x, y) = x + 4y = 63 \end{aligned}$$

- (a) (10 puntos) Formar la función Lagrangiana del problema y hallar sus puntos críticos.
 - (b) (10 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior (máximos locales, mínimos locales o puntos de silla).
 - (c) (5 puntos) Determinar si alguno de los extremos locales hallados en el apartado anterior son extremos globales de f sujetos a la restricción.
 - (d) (10 puntos) Supongamos ahora que la restricción cambia a $g(x, y) = 63$ y se añaden las condiciones de no negatividad sobre las variables, $x \geq 0$, $y \geq 0$. ¿Es posible que alguno de los extremos de f hallados en apartados anteriores sea extremo global de f sujeto a las nuevas restricciones?
-

4

Se considera el programa

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x^2 + 2y^2 + 2x - 4y \\ \text{s.a.} & y \leq x \\ & x \geq -y \end{array}$$

- (a) (20 puntos) Obtenga las soluciones de las ecuaciones de Kuhn–Tucker correspondientes al programa.
(b) (10 puntos) Justifique que el programa tiene solución global.
-