UC3M
Optimización Matemática para la Economía
Examen Final Extraordinario 2 de julio de 2024 **Nombre:** ______________________

Niu: ______________ Group: ______

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos	40	20	35	25	120
Nota					

Instrucciones:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 100'**.
- No se permiten calculadoras.
- Mantenga su teléfono apagado o en modo avión y fuera de su alcance
- Por favor, no desgrape el cuadernillo.
- Enseñe un documento con su identidad si el profesor lo requiere.
- Lea el examen con detenimiento. El examen consta de 4 preguntas, y se califica sobre 120 puntos.
- Justifique todas sus respuestas.

$\boxed{1}$

Se considera el conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ y \geq \frac{3}{4}(x-1),\ y \leq \frac{x}{x-1} \right\}.$$

(a) (10 puntos) Representar gráficamente el conjunto A.

(b) (10 puntos) Considere el orden de Pareto definido sobre el conjunto A; hallar los maximales, minimales, máximo y mínimo de A. Razone las respuestas. Si encuentra que alguno de estos elementos no existe en A, razone por qué.

(c) (10 puntos) Estudie de forma gráfica la existencia de extremos globales de $f(x, y) = y - 2x$ en A. Utilice para ello los conceptos de curva de nivel y de dirección de máximo crecimiento o decrecimiento, dibujando algunos de estos objetos sobre la gráfica del conjunto A.

(d) (10 puntos) Estudie de forma gráfica la existencia de extremos globales de $f(x, y) = y - 0.5x$ en A. Utilice para ello los conceptos de curva de nivel y de dirección de máximo crecimiento o decrecimiento, dibujando algunos de estos objetos sobre la gráfica del conjunto A.

$\boxed{2}$

Se considera la función $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy - x + 6$.

(a) (10 puntos) Determinar los puntos críticos de f.

(b) (10 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior. ¿Es alguno de ellos extremo global de f?

$\boxed{3}$

Se considera el problema de Lagrange:

$$\begin{aligned} &\text{optimizar} \quad && f(x,y,z) = 2x - y \\ &\text{sujeto a:} \quad && g(x,y,z) = (x-y)^2 + 3y^2 + z^2 = 39 \end{aligned}$$

(a) (5 puntos) Probar que el problema admite solución global.

(b) (10 puntos) Construir la función Lagrangiana asociada y hallar los puntos críticos.

(c) (10 puntos) Determinar los máximos y mínimos globales de f sujetos a la restricción y el valor óptimo de f en cada caso.

(d) (10 puntos) Dar un valor aproximado de los valores máximo y mínimo de f sobre el conjunto factible cuando la restricción se transforma en $g(x,y,z) = (x-y)^2 + 3y^2 + z^2 = 39 + h$, donde h es una cantidad despreciable.

$\boxed{4}$

Se considera el programa

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x + y \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 4, \\ & y \leq 1. \end{array}$$

(a) (10 puntos) Discutir si se trata de un programa convexo y si las condiciones necesarias de Kuhn–Tucker son también suficientes.

(b) (15 puntos) Obtener las soluciones de las ecuaciones e inecuaciones de Kuhn–Tucker correspondientes al programa y resolver el programa de optimización.
