

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos	30	30	30	30	120
Nota					

1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x, y) = xy$. Considere el orden de Pareto definido sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, \quad x \geq 0\}.$$

- (10 puntos) Representar el conjunto A . Calcular, si existen, los elementos maximales y minimales, el máximo y el mínimo de A . Si alguno de los elementos anteriores no existen, justificar por qué.
 - (10 puntos) Justificar si la función f y el conjunto A verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass.
 - (10 puntos) Representar algunas de las curvas de nivel y algunas de las direcciones de máximo crecimiento de la función f , superponiéndolas en el conjunto A . Identificar el máximo global y el mínimo global de f en A gráficamente y calcular ambos puntos. Justificar la respuesta.
-

2 Se considera la función $f(x, y) = (1 - xy)^2$.

- (10 puntos) Determinar los puntos críticos de f .
 - (10 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior.
 - (10 puntos) Hallar, si existen, lo máximos y los mínimos globales de f .
-

3 La función de producción de una empresa es $5x + xy + 3y$, donde x denota las unidades de mano de obra y y las de capital. Cada unidad de mano de obra cuesta 15 unidades monetarias (u.m.), mientras que cada unidad de capital cuesta 3 u.m. El presupuesto total que gasta la empresa es de 3000 u.m.

- (15 puntos) Utilizando las ecuaciones de Lagrange del problema, encontrar el nivel de producción óptimo de la empresa. (Nota: la respuesta que no esté basada en las ecuaciones de Lagrange será calificada con 0 puntos).
 - (15 puntos) ¿Cómo responde la producción óptima a cambios en el presupuesto total de la empresa? ¿Cuál es el impacto de un aumento presupuestario de 1 u.m.? ¿Qué aumento aproximado de presupuesto haría incrementar la producción un 1%?
-

4 Considerar el problema de Kuhn–Tucker siguiente

$$\max -x^2 + 2y^2 - 4y + 10$$

$$\text{sujeto a: } x^2 + (y - 2)^2 \leq 1.$$

- (10 puntos) Justificar si el conjunto A y la función f satisfacen las condiciones del Teorema de Weierstrass. ¿Se trata de un problema convexo?
 - (10 puntos) Encontrar todos los puntos que suplen las condiciones necesarias de Kuhn–Tucker, incluyendo el valor del multiplicador, en cada caso.
 - (10 puntos) Encontrar la(s) soluciones del problema de Kuhn–Tucker.
-