$\boxed{1}$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x, y) = \frac{1}{2 - (x + y)}.$$

Considere el orden de Pareto definido sobre el conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + y \leq 1,\ -(1 - x)^2 \leq y \leq (1 + x)^2\right\}.$$

(a) (10 puntos) Representar razonadamente el conjunto A. Calcular, si existen, los elementos maximales y minimales, el máximo y el mínimo de A. Si alguno de los elementos anteriores no existen, justificarlo.

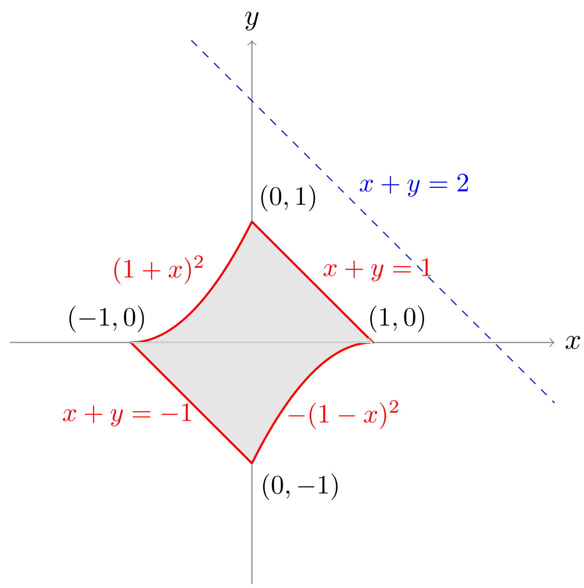
(b) (10 puntos) Justificar si la función f y el conjunto A verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass.

(c) (10 puntos) Representar algunas de las curvas de nivel superponiéndolas en el conjunto A. Identificar los puntos de A donde f alcanza máximos y mínimos globales, si existen, y calcular su valor.

Solución:

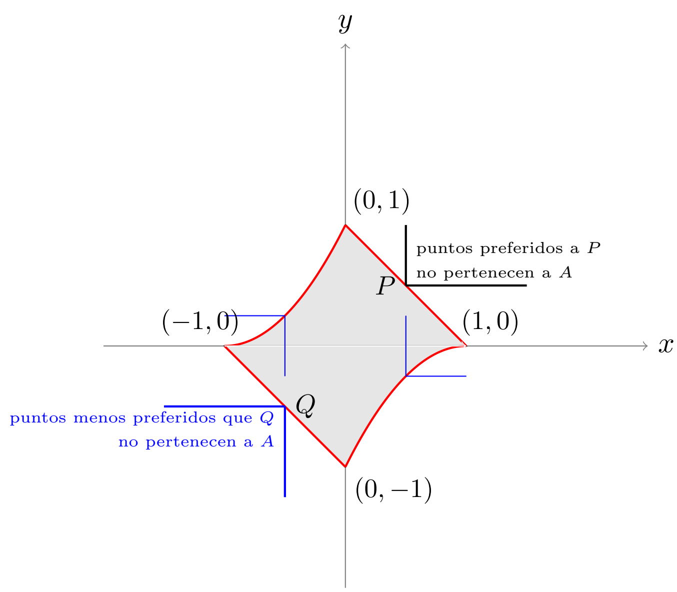
(a)

El conjunto A está delimitado por dos ramas de parabola y dos rectas paralelas de pendiente negativa, ver la figura a la derecha. A es cerrado, dado que contiene a sus puntos frontera, y es acotado, luego A es compacto. La función f es continua en A, dado que es el cociente de dos funciones continuas, cuyo denominador no se anula en A, ya que el denominador, $2-(x+y)$, no se anula en A, dado que para todo $(x, y) \in A$, $x + y \leq 1$. Lugo, las hipótesis del Teorema de Weierstrass se cumplen y, por tanto, la función f alcanza máximos y mínimos globales en A.



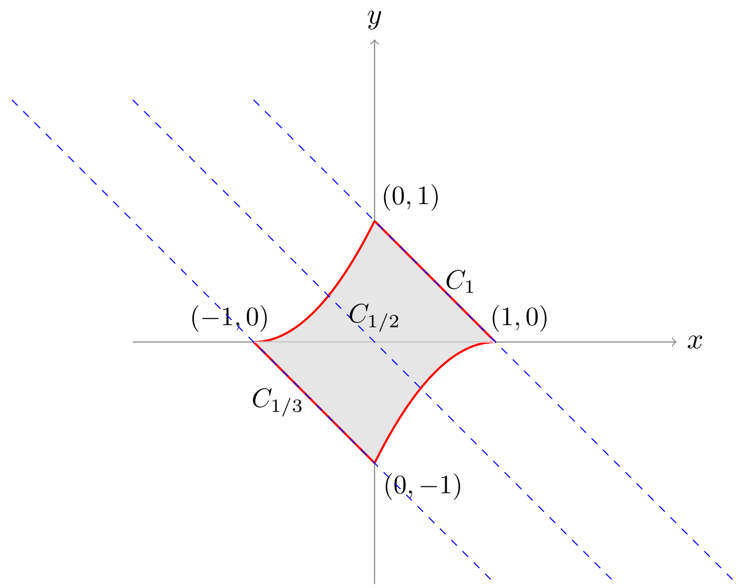
(b)

The figure at the right represents four preference cones in the Pareto order, attached to different boundary points of A. Clearly, the set of maximals is the segment that joins $(1, 0)$ with $(0, 1)$, and the set of minimals is the segment joining $(-1, 0)$ and $(0, -1)$. A has no maximum nor minimum since the set of maximals (minimals) is not a singleton.



(c) Las curvas de nivel son

$$C_k = \left\{ (x, y) : \frac{1}{2-(x+y)} = k \right\}, \quad \text{for } k \neq 0.$$



Tras algunas operaciones, vemos que las curvas de nivel son rectas paralelas de pendiente $-1{,}2-(x+y)=\frac{1}{k}$, es decir, $x+y=2-\frac{1}{k}$. Al crecer k, es decir, al crecer la función f, las curvas de nivel se desplazan paralelamente hacia la derecha en el plano OXY, y cuando k (f) decrece, las curva de nivel se desplazan hacia la izquierda en el plano OXY. Ver la figura a la derecha. Los máximos globales de f en A se alcanzan en el segmento que une $(0, 1)$ y $(1, 0)$, con valor 1, y los mínimos globales en el segmento que une $(-1, 0)$ con $(0, -1)$, con valor $\frac{1}{3}$.

$\boxed{2}$

Se considera la función $f(x,y) = y(2x^2 + y^2 + 2xy + 2y + 2)$.

(a) (10 puntos) Determinar los puntos críticos de f.

(b) (10 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior.

Solución:

(a) Los puntos críticos (x,y) satisfacen el sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$, es decir

$$\begin{cases} y(4x+2y) = 0 \\ y(2y+2x+2) + (2x^2+y^2+2xy+2y+2) = 0. \end{cases}$$

Supongamos que $y = 0$. La segunda ecuación es $2x^2 + 2 = 0$, que no tiene solución.

Supongamos que $4x + 2y = 0$, es decir, $y = -2x$. La segunda ecuación es

$$-2x(-4x+2x+2) + (2x^2+4x^2-4x^2-4x+2) = 6x^2 - 8x + 2 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática tiene soluciones $x = 1$ y $x = \frac{1}{3}$.

Luego f admite dos puntos críticos, $(1,-2)$ y $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

(b) La matriz Hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x+4y \\ 4x+4y & 4x+6y+4 \end{pmatrix}.$$

En el punto $(1,-2)$, $Hf(1,-2) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$, que es definida negativa, luego $(1,-2)$ es un máximo local de f. En $(1/3,-2/3)$

$$Hf(1/3,-2/3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},$$

que es indefinida, luego $(1/3,-2/3)$ es un punto de silla de f.

$\boxed{3}$

Se considera el problema de Lagrange

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & f(x,y) := 15x + 3y \\ \text{sujeto a:} & g(x,y) := 5x + xy + 3y = 30. \end{array}$$

(a) (5 puntos) Comprobar que la condición de regularidad se cumple. Escribir la Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.

(b) (10 puntos) Resolver las ecuaciones de Lagrange, hallando todos los puntos críticos (x^*, y^*, λ^*) de la Lagrangiana.

(c) (10 puntos) Clasificar los puntos críticos (x^*, y^*, λ^*) del apartado anterior (máximos locales, mínimos locales o puntos de silla).

Solución:

(a) La Lagrangiana es $L(x, y, \lambda) = 15x + 3y - \lambda(5x + xy + 3y - 30)$. Notar que

$$\nabla g(x,y) = (5 + y, 3 + x) = (0,0) \quad \text{si y sólo si} \quad (x,y) = (-3,-5).$$

Este punto no es del conjunto factible, luego el Teorema de Lagrange se aplica a todos los puntos.

Ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) &= 15 - \lambda(5+y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) &= 3 - \lambda(3+x) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= -(5x + xy + 3y - 30) = 0 \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones permiten obtener $\lambda = \frac{15}{5+y} = \frac{3}{x+3}$, lo que establece la relación $y = 5x + 10$ entre x e y; al substituirla en la tercera ecuación, obtenemos

$$5x^2 + 30x = 0.$$

Las soluciones son $x = 0$ y $x = -6$, obteniendo los puntos críticos de la Lagrangiana

$$(x^*, y^*, \lambda^*) = (0, 10, 1) \text{ y } (x^{**}, y^{**}, \lambda^{**}) = (-6, -20, -1).$$

(b) La matriz Hessiana de la Lagrangianacon respecto a las variables (x, y) es

$$H_{(x,y)}L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

que es indefinida.

La ecuación del espacio tangente en el punto del conjunto factible (x, y) viene dada por $\nabla g(x, y) \cdot (h, k) = 0$, es decir

$$(5 + y)h + (3 + x)k = 0. \tag{1}$$

En $(x^*, y^*) = (0, 10)$, la ecuación es $15h + 3k = 0$, o $k = -5h$. Dado que

$$H_{(x,y)}L(0,10,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

esta forma cuadrática restringida a $15h + 3k = 0$ es $10h^2$, definida positiva, luego $(0, 10)$ es un mínimo local.

En $(x^*, y^*) = (-6, -20)$, la ecuación es $-15h - 3k = 0$, o $k = -5h$ (la misma que antes). Dado que

$$H_{(x,y)}L(-6, -20, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la forma cuadrática restringida a $15h + 3k = 0$ es $-10h^2$, definida negativa, luego $(-6, -20)$ es un máximo local.

$\boxed{4}$

Se considera el problema de optimización de Kuhn–Tucker dado por

$$\max \ f(x,y) := x^3 + y^2$$
$$\text{sujeto a: } g(x,y) := x^2 + y^2 \leq 1.$$

(a) (5 puntos) Representar el conjunto factible S. Justificar si el conjunto S y la función f satisfacen las condiciones del Teorema de Weierstrass. Comprobar que todos los puntos del conjunto factible son regulares.

(b) (10 puntos) Escribir las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker para este problema (tanto el sistema de ecuaciones como las desigualdades). Encontrar todos los puntos que satisfacen las condiciones de Kuhn–Tucker, sin olvidar los multiplicadores respectivos.

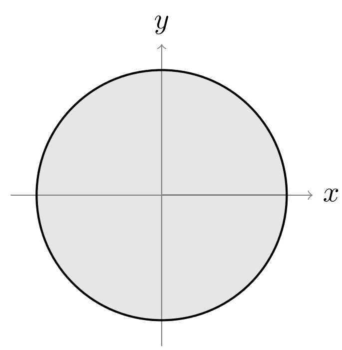
(c) (10 puntos) Encontrar las soluciones del problema de Kuhn-Tucker.

Solución:

(a)

f es continua, ya que es un polinomio. El conjunto factible es el disco de centro (0,0) y radio 1, que es compacto, dado que contiene a sus puntos frontera y además es acotado. Las condiciones del Teorema de Weierstrass se cumplen. Ver la figura a la derecha.

Todos los puntos son regulares:
(i) todos los puntos interiores son regulares, por definición;
(ii) $\nabla(x^2+y^2) = (2x, 2y)$, nunca se anula en los puntos frontera $x^2+y^2=1$;.



(b) La Lagrangiana es $L(x,y,\lambda) = x^3 + y^2 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$. Las condiciones de Kuhn-Tucker están formadas por las ecuaciones

$$\text{KT} \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda,\mu) &= x(3x - 2\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda,\mu) &= 2y(1-\lambda) = 0 \\ \lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda,\mu) &= \lambda(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

y las inecuaciones $\lambda \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

En primer ligar resolvemos el sistema KT

$$\begin{cases} (1) & x(3x - 2\lambda) = 0 \\ (2) & 2y(1-\lambda) = 0 \\ (3) & \lambda(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

y luego pasaremos a verificar cuáles de ellas satisfacen las desigualdades.

Caso 1: $(0,0,0)$ es obviamente solución.

Caso 2: $x = 0$, $y \neq 0$: (2) implica $\lambda = 1$ y (3) implica $y^2 = 1$, es decir $y = \pm 1$. Obtenemos

$$(0, \pm 1, 1).$$

Caso 3: $x \neq 0$ y $y = 0$: (1) implica $3x - 2\lambda = 0$, luego $\lambda = \frac{3}{2}x \neq 0$ y (3) implica $x^2 = 1$, es decir, $x = \pm 1$. Obtenemos

$$(1, 0, \frac{3}{2}) \quad \text{y} \quad (-1, 0, -\frac{3}{2}).$$

Caso 4: $x \neq 0$ y $y \neq 0$: (1) implica $3x - 2\lambda = 0$ y (2) $\lambda = 1$; luego, $x = \frac{2}{3}$ y por (3), $(2/3)^2 + y^2 = 1$ implica $y^2 = 1 - (4/9) = 5/9$, luego $y = \pm\sqrt{5/9}$. Obtenemos

$$(\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{5}{9}}, 1) \quad \text{and} \quad (\frac{2}{3}, -\sqrt{\frac{5}{9}}, 1)$$

Pasamos a comprobar las condiciones $\lambda \geq 0$ y $x^2 + y^2 \leq 1$ sobre los puntos hallados.

Claramente los casos 1 y 2 las cumplen.

En el Caso 3, sólo $(1, 0, \frac{3}{2})$ pasa el test, dado que el otro punto tiene multiplicador negativo.

En el caso Caso 4, ambas soluciones son admisibles

Luego tenemos 6 puntos que satisfacen las condiciones de KT, que se listan de nuevo en el apartado (c) que sigue.

(c) Por (a), el problema tiene solución. Por el Teorema de KT, las soluciones deben satisfacer las condiciones de KT. Hemos encontrado los candidatos $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(1, 0)$ and $(\frac{2}{3}, \pm\sqrt{\frac{5}{9}})$ ien el apartado (b), que se marcan en la figura inferior. Los puntos $(0, \pm 1)$ y $(1, 0)$ son los máximos globales.

$$f(0,0) = 0, \quad f(\frac{2}{3}, \pm\sqrt{\frac{5}{9}}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \sqrt{\frac{5}{9}}^2 = \frac{8}{27} + \frac{5}{9} = \frac{23}{27} < 1, \quad f(0, \pm 1) = f(1, 0) = 1.$$