UC3M
Optimización Matemática para la Economía
Examen Final, 20 de mayo de 2022

Niu: ______________ Group: ____

Nombre: ________________________________

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos	15	15	15	15	60
Nota					

Instrucciones:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 90'**.
- No se permiten calculadoras.
- Mantenga su teléfono apagado o en modo avión y fuera de su alcance
- Por favor, no desgrape el cuadernillo.
- Enseñe un documento con su identidad si el profesor lo requiere.
- Lea el examen con detenimiento. El examen consta de 4 preguntas, y se califica sobre 60 puntos.
- Justifique todas sus respuestas.

$\boxed{1}$

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $F(x,y) = ax + y$, donde $a \neq 0$. Se considera el orden de Pareto definido sobre el conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 2x;\ y \leq x + 4;\ x \geq 0\right\}.$$

(a) (5 puntos) Dibuje el conjunto A. Calcule, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y el mínimo de A. Justifique las respuestas.

(b) (5 puntos) Suponga que $a = 1$. Represente las curvas de nivel $c = 0, 1, 3$ de F sobre el conjunto A, así como la dirección de máximo crecimiento de la función F. Calcule, si existen, los máximos y los mínimos de F en A.

(c) (5 puntos) Halle el rango de valores de a tal que el máximo de F sobre A se alcance en el punto $(0,4)$.

$\boxed{2}$

Una empresa monopolista produce dos bienes A y B, de los que vende diariamente x e y unidades, respectivamente. La función de costes está dada por

$$C(x, y) = x^2 + 4y^2 + 2xy - 20x + 30.$$

Los precios unitarios de los bienes A y B son, respectivamente

$$p_A(x, y) = 60 - x - ay,$$

$$p_B(x, y) = 80 - 4y - ax,$$

donde a es un parámetro desconocido.

(a) (5 puntos) Encontrar el rango de valores de a para los que la función de beneficios de la empresa es una función cóncava.

(b) (5 puntos) Sea $a = 1$. Encontrar los valores de x e y, si existen, que maximizan los beneficios de la empresa.

(c) (5 puntos) Sea $a = 1$. Un nuevo reglamento exige vender los productos en paquetes formados por una unidad del bien B y 2 unidades del bien A. Encontrar los valores de x e y, si existen, que maximizan los beneficios de la empresa.

3

Se considera el siguiente problema de Lagrange:

$$\text{Optimizar } f(x,y) = xy - 3x - 6y$$
$$\text{sujeto a: } g(x,y) = 2x + 4y = 40.$$

(a) (5 puntos) Encontrar todos los puntos críticos del problema.

(b) (5 puntos) Encontrar todos los extremos locales de $f(x,y)$ sujetos a la restricción. Justificar si los extremos locales son o no globales.

(c) (5 puntos) Se supone que $f(x,y)$ es la función de beneficios de una empresa y que $2x + 4y = 40$ es la restricción presupuestaria, ambas expresadas en miles de euros.

Calcular de forma aproximada el incremento en los beneficios si los fondos de la empresa se incrementan en 1.000 euros.

$\boxed{4}$

Se considera el problema de Kuhn–Tucker:

$$\begin{array}{ll} \max & x + 2y \\ \text{s.t.} & x^4 + 2y^4 \leq 3. \end{array}$$

(a) (10 puntos) Encontrar todos los puntos que satisfacen todas las condiciones necesarias de Kuhn–Tucker.

(b) (5 puntos) Justificar que el problema tiene soluciones globales y encontrarlas.
