1

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x, y) = \ln(x + y - 2)$. Considere el orden de Pareto definido sobre el conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 6 - (x - 2)^2;\ y \geq 2 - x;\ x \leq 2\right\}.$$

(a) (5 puntos) Representar el conjunto A, justificando su gráfico.

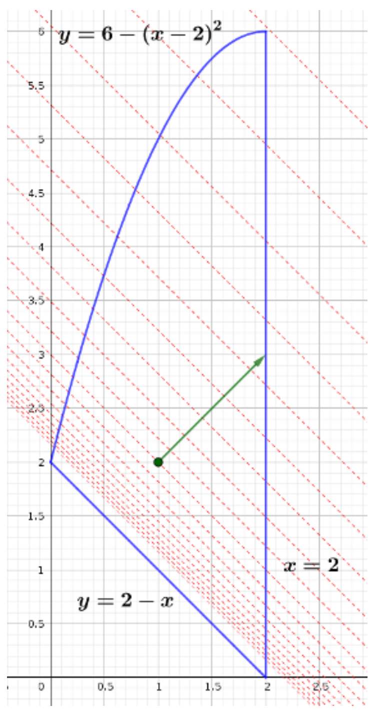
(b) (5 puntos) Calcular, si existen, los elementos maximales y minimales, el máximo y el mínimo de A. Justificar la respuesta.

(c) (5 puntos) Justificar si la función f y el conjunto A verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass.

(d) (5 puntos) Representar la curvas de nivel $c = \ln\frac{1}{2}$, $c = 1$ y $c = \ln 6$ de la función f, superponiéndolas en el conjunto A, mostrando también las direcciones de crecimiento y de decrecimiento de la función f. Calcular, si existen, loa máximos y mínimos globales de f en A. En el caso de que alguno de ellos no exista, justifique su respuesta.

Solution:

(a)



El conjunto A está formado por los puntos situados en la intersección de las siguientes regiones:

- $y \leq 6 - (x - 2)^2$. Región situada bajo la parábola invertida con vértice en el punto $(2, 6)$, y que corta el eje de ordenadas en el punto $(0, 2)$.
- $y \geq 2 - x$. Región situada por encima de la recta $y = -x + 2$, recta con pendiente negativa, -1, y que corta a los ejes de coordenadas en los punto $(2, 0)$ y $(0, 2)$.
- $x \leq 2$. Región situada a la izquierda de la recta vertical $x = 2$.

En el gráfico adjunto puede verse el dibujo del conjunto definido en el enunciado del problema.

(b) Los elementos maximales y máximo de un subconjunto del conjunto ordenado $(\mathbb{R}^2, \preceq_P)$, habrá que buscarlos en los puntos (x, y) del conjunto con los mayores valores de x e y.

En el caso del conjunto A, el punto $(2, 6) \in A$ se puede relacionar con todos los restantes elementos de A, y además, cualquier otro elemento $(x_0, y_0) \in A$ siendo $(x_0, y_0) \neq (2, 6)$ cumple que $(x_0, y_0) \preceq_P (2, 6)$. Por ello, **el punto** $(2, 6)$ **es el máximo de** A**, y por ello, además,** $(2, 6)$ **es el único maximal de** A**, o sea,** $\text{Max}(A) = \text{Maximales}(A) = \{(2, 6)\}$.

Los elementos minimales y mínimo de un subconjunto del conjunto ordenado $(\mathbb{R}^2, \preceq_P)$, habrá que buscarlos en los puntos (x, y) del conjunto con los menores valores de x e y.

En el caso del conjunto A, los puntos candidatos a ser mínimo o minimales de A, son los que se encuentran en el segmento lineal incluido en la recta $y = -x + 2$, para $0 \leq x \leq 2$. Sea (x_1, y_1) un punto cualquiera de dicho segmento; se puede ver gráficamente que $\nexists (x, y) \in A, \quad (x, y) \neq (x_1, y_1) : (x, y) \preceq_P (x_1, y_1)$. Así pues, todos esos puntos son minimales de A. Pero, además, para cada uno de esos puntos, se verifica que no es menor que todos los restantes puntos de A, porque siempre hay puntos de A con los que no se pueden relacionar. Por todo ello, A **no tiene mínimo** ($\text{Min}(A) = \emptyset$), y $\text{Minimales}(A) = \{(x, y) : \quad y = -x + 2, \quad 0 \leq x \leq 2\}$.

(c) Enunciado del Teorema de Wierstrass:

Sean una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$; si se cumple que (*Hipótesis del Teorema*):

(a) f es continua en A,

(b) A es un conjunto compacto, lo que significa que es cerrado y acotado

entonces (*Tesis del Teorema*) se puede asegurar que f presenta un máximo global y un mínimo global dentro del conjunto A. En este caso:

- El conjunto A sí es cerrado (incluye su frontera) y es acotado (se puede incluir dentro de una bola de radio finito), por lo que A **sí es compacto**.
- f es continua en su domino, es decir, en puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tales $x + y - 2 > 0$. Sin embargo, la recta $x + y = 2$ interseca al conjunto A en los puntos del segmento $x + y = 2$, $0 \leq x \leq 2$, donde f no está definida, por lo que f no es continua en todo el conjunto A.

Por ello, la función f y el conjunto A **no verifican las hipótesis del Teorema de Weirstrass**, y como consecuencia, **no se puede asegurar que la función f alcance extremos globales dentro del conjunto A**.

(d) Las curvas de nivel de f siguen la expresión:

$$\ln(x + y - 2) = c \Rightarrow x + y - 2 = e^c \Rightarrow y = -x + 2 + e^c$$

Las curvas de nivel son rectas de pendiente -1, y en las que la ordenada en el origen va creciendo al crecer el valor de c. Por ello, el valor de la función va creciendo conforme las curvas de nivel se van alejando del origen de coordenadas. Por otra parte, conforme c se va haciendo más negativo, e^c va tendiendo a cero, y por ello, las rectas de nivel se van juntando al acercarse a la recta $y = -x + 2$, sin que ésta llegue a ser una de las curvas de nivel, puesto que $e^c \neq 0$..

En el gráfico anterior se han dibujado algunas curvas de nivel de la función, sobre las que se ha representado el conjunto A.

Para identificar la dirección y sentido de máximo crecimiento de la función de forma analítica, se utiliza el gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{x + y - 2}, \frac{1}{x + y - 2}\right)$$

Vector gradiente en el punto $(1, 2)$:

$$\nabla f(1, 2) = \left(\frac{1}{1 + 2 - 2}, \frac{1}{1 + 2 - 2}\right) = (1, 1)$$

Así pues, el vector gradiente en ese punto, tiene origen en $(1, 2)$ y extremo en $(1 + 1, 2 + 1) = (2, 3)$. En el gráfico anterior se representa el vector, que muestra claramente el sentido del crecimiento de la función al pasar de una recta de nivel a otra ($f(x, y)$ va creciendo conforme el punto (x, y) se va alejando del origen de coordenadas). Por ello, el máximo global de f en A se encontrará en el punto de A por el que pase la curva de nivel de f con el mayor valor posible, o sea, la más alejada del origen de coordenadas. Por lo tanto, **el punto $(2, 6)$ es el maximizador global de f en A**. Y el valor máximo de f en A es $f(2, 6) = \ln(2 + 6 - 2) = \ln 6$.

El mínimo global de f en A se encontrará en el punto de A por el que pase la curva de nivel de f con el menor valor posible, o sea, la más cercana al origen de coordenadas. Lo que ocurre es que, dentro del conjunto A, y acercándonos al segmento $y = -x + 2$, $0 \leq x \leq 2$ que forma una de las fronteras de A, para cualquier recta de nivel que elijamos, siempre podemos encontrar otra con un valor de la función menor (valor de c más negativo), sin llegar nunca a la recta que incluye el segmento anterior. Por ello, **la función f no alcanza mínimo global dentro del conjunto A**.

$\boxed{2}$

Una empresa estatal gestionada por el Gobierno del país $\mathbb{G}$ produce dos bienes A y B, de los que vende x e y unidades diarias, respectivamente. La función de costes está dada por

$$C(x, y) = xy + 2x^2 + y^2.$$

El precio unitario del bien A es $p_A(x, y) = 3 - 2x - \alpha y$, donde $\alpha > 0$ es un parámetro positivo. El precio unitario del bien B es constante, igual a 1, es decir, $p_B(x, y) = 1$.

(a) (5 puntos) Encontrar el rango de valores de α para los que la función de beneficios de la empresa es una función cóncava.

(b) (5 puntos) Sea $\alpha = 1$. Encontrar los valores de x e y que maximizan los beneficios de la empresa.

(c) (5 puntos) Sea $\alpha = 1$. El Gobierno ordena a los directivos de la empresa producir cantidades de los bienes A y B tales que el precio unitario del bien A sea 2, es decir, $p_A(x, y) = 3 - 2x - y = 2$. Encontrar los valores de x y de y que maximizan los beneficios de la empresa bajo esta restricción.

(d) (5 puntos) Sea $\alpha = 1$. Suponga ahora que el Gobierno ordena a los directivos de la empresa producir cantidades de los bienes A y B tales que el precio unitario del bien A sea $2 + \frac{1}{6}$, es decir, $p_A(x, y) = 3 - 2x - y = 2 + \frac{1}{6}$. Sin resolver este nuevo problema de Lagrange, dar una valor estimado del incremento (positivo o negativo) de los beneficios óptimos de la empresa con respecto al caso resuelto en el apartado (c) anterior, cuando el precio unitario de A fue fijado en 2. Base su respuesta en el valor del multiplicador encontrado en el apartado (c).

Solution:

(a) Return function:

$$R(x, y) = xp_A(x, y) + yp_B(x, y) = x(3 - 2x - \alpha y) + y = 3x - 2x^2 - \alpha xy + y.$$

Profits:

$$\begin{aligned} \Pi(x, y) &= R(x, y) - C(x, y) \\ &= 3x - 2x^2 - \alpha xy + y - xy - 2x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Hessian matrix of the profit function:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 3 - 4x - \alpha y - y - 4x \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = -8 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x} = -(1 + \alpha) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -\alpha x + 1 - x - 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = -2$$

Thus

$$\mathrm{H}\Pi(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -(1 + \alpha) \\ -(1 + \alpha) & -2 \end{pmatrix}$$

Sign of the principal minors:

- $D_1 = -8 < 0$;
- $D_2 \geq 0$ iff $16 - (1 + \alpha)^2 \geq 0$ iff $|1 + \alpha| \leq 4$ iff $-5 \leq \alpha \leq 3$.

In sum, Π is concave iff $0 < \alpha \leq 3$ (since $\alpha > 0$ by assumption).

(b) By (a) above, the local extrema of Π satisfy with $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} 3 - 4x - y - y - 4x &= 0 \\ -x + 1 - x - 2y &= 0. \end{aligned}$$

The solution of this linear system is $(x^*, y^*) = (1/3, 1/6)$. Since $\alpha = 1$ is in the region of the parameter α where Π is concave, (x^*, y^*) is the global maximum of Π.

(c) Let $\alpha = 1$. Taking into account the constraint on the price of A, $3 - 2x - y = 2$, the problem becomes the Lagrange problem

$$\max \;\; \Pi(x, y) = 3x - 2x^2 - xy + y - xy - 2x^2 - y^2 \quad \text{s.t.}: \; 2x + y = 1.$$

The regularity condition is fulfilled since the gradient of the constraint, $(2, 1)$, never vanishes.

Lagrangian:

$$L(x, y, \lambda) = 3x + y - 4x^2 - 2xy - y^2 + \lambda(1 - 2x - y).$$

Lagrange's equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \Rightarrow 3 - 8x - 2y - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \Rightarrow 1 - 2x - 2y - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0 \Rightarrow 2x + y = 1. \end{aligned}$$

Solving for λ we find

$$\lambda = 3/2 - 4x - y = 1 - 2x - 2y \quad \Rightarrow \quad 2x - y = 1/2.$$

Solving the system $(2x - y = 1/2 \;,\; 2x + y = 1)$ we obtain $4x = 3/2$, thus $x^{**} = 3/8$ and then $y^{**} = 1 - 2x^{**} = 1/4$.

Since the profit function is concave when $\alpha = 1$ and the constraint is linear, the critical point (x^{**}, y^{**}) is the unique global maximum of the problem.

(d) Let $\alpha = 1$. The new price of A being $2 + \frac{1}{6}$ means that $p_A(x, y) = 3 - 2x - y = 2 + \frac{1}{6}$, thus the constraint becomes

$$2x + y = 3 - 2 - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6}.$$

If we compare with the constraint in part (c), $2x + y = 1$, then we see that the independent term has been diminished in $\frac{1}{6}$. Since the value of the multiplier in the problem solved in (c) is

$$\lambda = 1 - 2x^{**} - 2y^{**} = 1 - \frac{6}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4},$$

we find that the increment of the profit function is positive, approximately equal to

$$\lambda\left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24} > 0.$$

$\boxed{3}$

Considere problema de Lagrange

$$\begin{aligned} \text{opt} \quad & 2x^2 + y^2 - z^2, \\ \text{s.t.} \quad & x^2 - y^2 = 1 \\ & x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{aligned}$$

(a) (5 puntos) Estudiar la condición de regularidad.

(b) (10 puntos) Encontrar todos los puntos que satisfacen las condiciones necesarias de optimalidad de Lagrange.
Ayuda: Observe que los puntos $(0, y, z)$ con primera coordenada nula no pertenecen al conjunto factible, dado que no cumplen la primera restricción.

(c) (5 puntos) Justificar que el problema admite soluciones globales y encontrarlas.
Ayuda: Aplicar el Teorema de Weierstrass y la parte (b) anterior.

Solution:

(a) The Jacobian matrix formed with the constraints is

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

The rank of the matrix is less than 2 iff $[8xy = 0,\ 4xz = 0$ and $-4yz = 0]$ (these are the three 2×2 minors). The solutions are $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$, but none of them are feasible. Thus every point is regular.

(b) Lagrangian: $L(x, y, \lambda, \mu) = 2x^2 + y^2 - z^2 + \lambda(1 - x^2 + y^2) + \mu(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.

Lagrange necessary conditions:

$$4x - 2\lambda x - 2\mu x = (4 - 2\lambda - 2\mu)x = 0 \tag{1}$$
$$2y + 2\lambda y - 2\mu y = (2 + 2\lambda - 2\mu)y = 0 \tag{2}$$
$$-2z - 2\mu z = -(2 + 2\mu)z = 0 \tag{3}$$
$$1 - x^2 + y^2 = 0 \tag{4}$$
$$4 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{5}$$

Using the Hint, we see from (1) that

$$\lambda + \mu = 2. \tag{6}$$

From (3), $z = 0$ or $\mu = -1$

- $z = 0$. Then (4) and (5) can be solved: From (4), $x^2 = 1 + y^2$ and plugging this into (5) with $z = 0$,

  $$1 + y^2 + y^2 = 4$$

  or $2y^2 = 3$, which implies $y = \pm\sqrt{3/2}$, hence $x = \pm\sqrt{1 + 3/2} = \pm\sqrt{5/2}$. We can find the multipliers from (1) and (2) using that both x and y are nonnull: $\lambda = \frac{1}{2}$ and $\mu = \frac{3}{2}$. Thus we find the four points

  $$(x, y, z) = (\pm\sqrt{5/2}, \pm\sqrt{3/2}, 0)$$

  are candidates.

- $\mu = -1$. Then from (6), $\lambda = 3$ and from (2), $y = 0$. Now, from (4), $x^2 = 1$ and from (5), $z^2 = 3$. Hence we find the four points

  $$(x, y, z) = (\pm 1, 0, \pm\sqrt{3}).$$

(c) The feasibility set is compact and the function is continuous. By the Theorem of Weierstrass, the problem admits global maximum and global minimum. This global extrema has to be among the points satisfying the Lagrange conditions, thus we simply evaluate the function on that points. We denote $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2$.

- $f(\pm\sqrt{5/2}, \pm\sqrt{3/2}, 0) = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$.
- $f(\pm 1, 0, \pm\sqrt{3}) = 2 + 3 = 5 = \frac{10}{2} < \frac{13}{2}$.

Thus, $(\pm\sqrt{5/2}, \pm\sqrt{3/2}, 0)$ are the global maxima of f under the constraints, and $f(\pm 1, 0, \pm\sqrt{3})$ are the global minima.