UC3M Niu: ____________ Group: ____

Optimización Matemática para la Economía

Examen Final Extraordinario, 21 de junio de 2022 **Nombre:** ____________________

Ejercicio	1	2	3	Total
Puntos	20	20	20	60
Nota				

Instrucciones:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 90'**.
- No se permiten calculadoras.
- Mantenga su teléfono apagado o en modo avión y fuera de su alcance
- Por favor, no desgrape el cuadernillo.
- Enseñe un documento con su identidad si el profesor lo requiere.
- Lea el examen con detenimiento. El examen consta de 3 preguntas, y se califica sobre 60 puntos.
- Justifique todas sus respuestas.

$\boxed{1}$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x, y) = \ln (x + y - 2)$. Considere el orden de Pareto definido sobre el conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 6 - (x - 2)^2;\ y \geq 2 - x;\ x \leq 2\right\}.$$

(a) (5 puntos) Representar el conjunto A, justificando su gráfico.

(b) (5 puntos) Calcular, si existen, los elementos maximales y minimales, el máximo y el mínimo de A. Justificar la respuesta.

(c) (5 puntos) Justificar si la función f y el conjunto A verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass.

(d) (5 puntos) Representar la curvas de nivel $c = \ln \frac{1}{2}$, $c = 1$ y $c = \ln 6$ de la función f, superponiéndolas en el conjunto A, mostrando también las direcciones de crecimiento y de decrecimiento de la función f. Calcular, si existen, loa máximos y mínimos globales de f en A. En el caso de que alguno de ellos no exista, justifique su respuesta.

$\boxed{2}$

Una empresa estatal gestionada por el Gobierno del país $\mathbb{G}$ produce dos bienes A y B, de los que vende x e y unidades diarias, respectivamente. La función de costes está dada por

$$C(x, y) = xy + 2x^2 + y^2.$$

El precio unitario del bien A es $p_A(x, y) = 3 - 2x - \alpha y$, donde $\alpha > 0$ es un parámetro positivo. El precio unitario del bien B es constante, igual a 1, es decir, $p_B(x, y) = 1$.

(a) (5 puntos) Encontrar el rango de valores de α para los que la función de beneficios de la empresa es una función cóncava.

(b) (5 puntos) Sea $\alpha = 1$. Encontrar los valores de x e y que maximizan los beneficios de la empresa.

(c) (5 puntos) Sea $\alpha = 1$. El Gobierno ordena a los directivos de la empresa producir cantidades de los bienes A y B tales que el precio unitario del bien A sea 2, es decir, $p_A(x, y) = 3 - 2x - y = 2$. Encontrar los valores de x y de y que maximizan los beneficios de la empresa bajo esta restricción.

(d) (5 puntos) Sea $\alpha = 1$. Suponga ahora que el Gobierno ordena a los directivos de la empresa producir cantidades de los bienes A y B tales que el precio unitario del bien A sea $2 + \frac{1}{6}$, es decir, $p_A(x, y) = 3 - 2x - y = 2 + \frac{1}{6}$. Sin resolver este nuevo problema de Lagrange, dar una valor estimado del incremento (positivo o negativo) de los beneficios óptimos de la empresa con respecto al caso resuelto en el apartado (c) anterior, cuando el precio unitario de A fue fijado en 2. Base su respuesta en el valor del multiplicador encontrado en el apartado (c).

$\boxed{3}$

Considere problema de Lagrange

$$\begin{aligned} \text{opt} \quad & 2x^2 + y^2 - z^2, \\ \text{s.t.} \quad & x^2 - y^2 = 1 \\ & x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{aligned}$$

(a) (5 puntos) Estudiar la condición de regularidad.

(b) (10 puntos) Encontrar todos los puntos que satisfacen las condiciones necesarias de optimalidad de Lagrange.
Ayuda: Observe que los puntos $(0, y, z)$ con primera coordenada nula no pertenecen al conjunto factible, dado que no cumplen la primera restricción.

(c) (5 puntos) Justificar que el problema admite soluciones globales y encontrarlas.
Ayuda: Aplicar el Teorema de Weierstrass y la parte (b) anterior.