UC3M
Optimización Matemática para la Economía
Examen Final Recuperación
23 de junio de 2021 **Soluciones**

$\boxed{1}$

Se considera la función $f(x,y) = \dfrac{1}{y - \frac{x}{2} + 1}$ y el conjunto

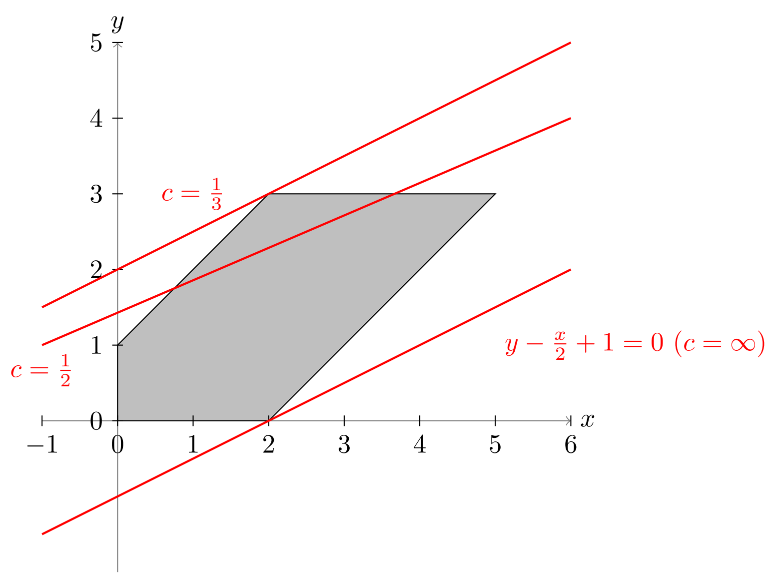
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \geq 0, \ y \geq 0, \ y \leq 3, \ x - 2 \leq y \leq x + 1\}.$$

(a) (6 puntos) Representar el conjunto A y discutir si la función f y el conjunto A satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass. ¿Puede asegurarse la existencia de extremos globales de f sobre el conjunto A?

(b) (6 puntos) Representar algunas curvas de nivel de f sobre el plano, mostrando las direcciones de crecimiento y decrecimiento de f y halla, si existen, los extremos globales de f sobre A. En el caso de que no existan, justificar la respuesta.

Solución:

(a) El conjunto A, y las curvas de nivel $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de f se representan en esta figura. La función no está definida en la recta $y - \frac{x}{2} + 1 = 0$,puesto que el denominador se anula.



El conjunto A es compact, pero como se ha dicho más arriba, f no es continua en la recta $y - \frac{x}{2} + 1 = 0$, la cual corta al conjunto A en el punto $(2,0)$. Luego, no se puede aplicar el Teorema de Weierstrass y la existencia de extremos globales de f en A no está a segurada.

(b) Las curvas de nivel de f están dadas por rectas

$$\frac{1}{y - \frac{x}{2} + 1} = c, \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow y - \frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{c} \neq 0.$$

Todas tienen la misma pendiente $\frac{1}{2}$, y por tanto son rectas paralelas que cortan al eje de ordenadas a la altura $1/c - 1$; por tanto, la ordenada crece a medida que el nivel c de f disminuye. Dado que $y - \frac{x}{2} + 1 > 0$ para todo $(x,y) \in A$, $c > 0$. Esto significa $f(x,y)$ grows to $+\infty$ a medida que $y - \frac{x}{2} + 1$ tiende a 0 en puntos de A. Luego

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,0) \\ (x,y)\in A}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(2,0) \\ (x,y)\in A}} \frac{1}{y - \frac{x}{2} + 1} = +\infty.$$

En consecuencia, f no está acotada superiormente en A y, por tanto, no tiene máximo global en A. Por otra parte, la recta $y - \frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{c}$ de mayor ordenada en el origen, $\frac{1}{c} - 1$, (y de nivel mínimo c) corta al conjunto A en el punto $(2,3)$. Luego, $(2,3)$ es el mínimo global de f en A, con valor mínimo $f(2,3) = \frac{1}{3}$.

$\boxed{2}$

Se considera la función $f(x,y) = (x^2 - x + 1)e^{x+ay^2}$, donde a es un parámetro diferente de 0, $a \neq 0$.

(a) (6 puntos) Encontrar los puntos críticos de f.

(b) (6 puntos) Para cada uno de los puntos críticos hallados en el apartado anterior, determinar el rango de valores del parámetro a para los cuales el punto crítico considerado es:

- Un máximo local.
- Un mínimo local.
- Un punto de silla.

(c) (6 puntos) Probar que la función f no tiene ni máximo ni mínimo globales.
Pista: Considerar la función $g(x) = f(x,0) = (x^2 - x + 1)e^x$ *y calcular* $\lim_{x\to\pm\infty}(x^2 - x + 1)e^x$.

Solución:

(a) Los puntos críticos de f satisfacen:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = ((x^2 + x)e^{x+ay^2}, 2ay(x^2 - x + 1)e^{x+ay^2})$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x^2 + x)e^{x+ay^2} = 0 \\ 2ay(x^2 - x + 1)e^{x+ay^2} = 0 \end{array} \right\}$$

Es decir, $x^2 + x = 0$ y $y = 0$. Esta simplificación es debida a que $e^{x+ay^2} \neq 0$ y $x^2 - x + 1 \neq 0$. En definitiva, existen dos puntos críticos de f, $(0,0)$ and $(-1,0)$.

(b) Para clasificar los puntos críticos recurrimos a las condiciones suficientes de segundo orden, que se basan en el signo de la matriz Hessiana de f, $\mathrm{H}f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = (x^2 + 3x + 1)e^{x+ay^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 2ay(x^2 + x)e^{x+ay^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = (x^2 - x + 1)(4a^2y^2 + 2a)e^{x+ay^2}$$

$$\mathrm{H}f(x,y) = e^{x+ay^2} \begin{pmatrix} x^2 + 3x + 1 & 2ay(x^2 + x) \\ 2ay(x^2 + x) & (x^2 - x + 1)(4a^2y^2 + 2a) \end{pmatrix}$$

En $(0,0)$ tenemos una matriz diagonal

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix},$$

- $\mathrm{H}f(0,0)$ definida positiva si $a > 0$, luego $(0,0)$ es un mínimo local en este caso.
- $\mathrm{H}f(0,0)$ indefinida si $a < 0$, luego $(0,0)$ es un punto de silla en este caso..

En $(-1,0)$ tenemos una matriz de nuevo diagonal

$$\mathrm{H}f(-1,0) = e^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6a \end{pmatrix},$$

- $\mathrm{H}f(-1,0)$ positiva definida si $a < 0$, luego $(-1,0)$ es un máximo local en este caso
- $\mathrm{H}f(-1,0)$ indefinida si $a < 0$, luego $(-1,0)$ es un punto de silla en este caso.

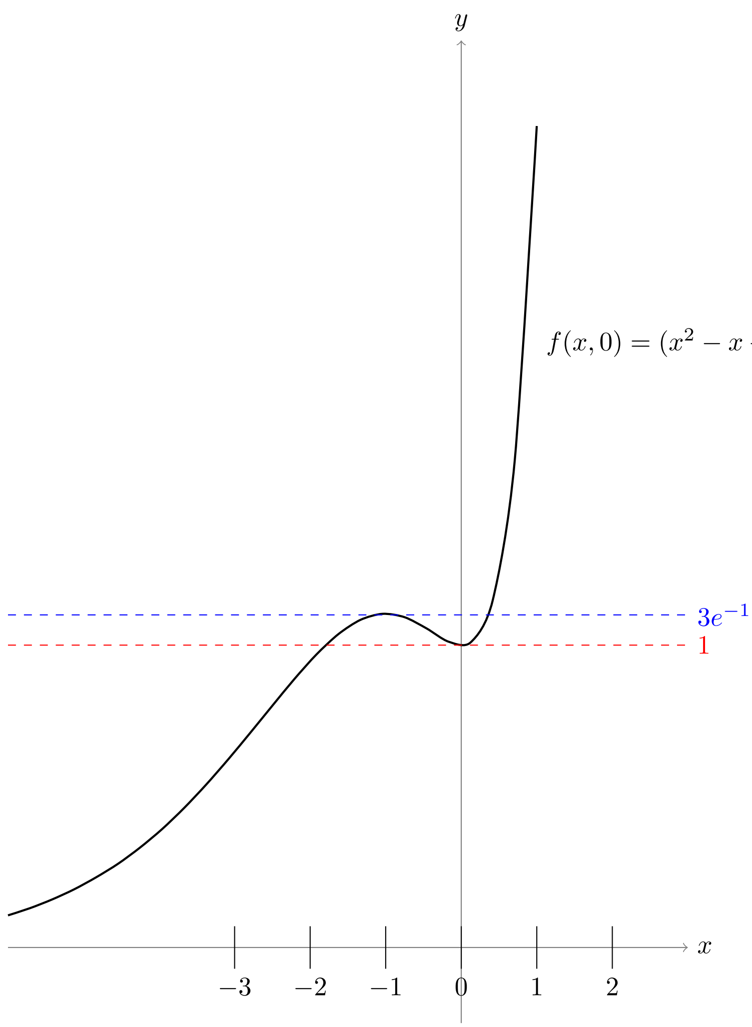
(c) Dado que $f(0,0) = 1$ y que $f(-1,0) = \frac{3}{e}$, es suficiente observar para probar que f no tienen extremos globales que $f(x,0)$ crece a infinito cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x + 1)e^x = \infty$$

y que

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2 - x + 1)e^x = 0.$$

este comportamiento se aprecia en la figura, donde el eje vertical se ha reescalado.



$\boxed{3}$

Se considera el problema de Lagrange:

$$\text{Opt } f(x,y,z) = -x\ln x - y\ln y - z\ln z \quad \text{s.a: } x+y+z=1$$

(a) (3 puntos) Obtener las ecuaciones de Lagrange.

(b) (3 puntos) Encontrar los puntos críticos de la función Lagrangiana.

(c) (3 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior. ¿Son extremos globales de f sujetos a la restricción? Justificar la respuesta.

(d) (6 puntos) Suponer que la restricción cambia a $x+y+z=0.85$, es decir, el problema se transforma en

$$\text{Opt } f(x,y,z) = -x\ln x - y\ln y - z\ln z \quad \text{s.a: } x+y+z=0.85.$$

Sin resolver este nuevo problema, hallar el valor óptimo aproximado de $f(x,y,z)$ tras el cambio. Esto implica obtener el valor aproximado del multiplicador, sabiendo que $\ln 3 \approx 1.1$.

Solución:

(a) Lagrangiana: $L(x,y,z) = -x\ln x - y\ln y - z\ln z + \lambda(1-x-y-z)$. Ecuaciones de Lagrange:

(i) $-\ln x - 1 - \lambda = 0$,

(ii) $-\ln y - 1 - \lambda = 0$,

(iii) $-\ln z - 1 - \lambda = 0$.

(b) Las ecuaciones (i)–(iii) anteriores implican $x=y=z$, y sustituyendo estas igualdades en la restricción, se obtiene $x=y=z=\frac{1}{3}$, con multiplicador $\lambda = -\ln\frac{1}{3} - 1 = \ln 3 - 1 \approx 0.1$.

(c) El conjunto restricción no es compacto pero sí que es convexo y f es estrictamente cóncava en su dominio. Para ver que f es estrictamente cóncava calculamos su matriz Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z} \end{pmatrix},$$

que es definida negativa en el conjunto convexo $\{(x,y,z) : x>0, y>0, z>0, x+y+z=1\}$. Por tanto, el punto crítico de la Lagrangiana proporciona el (único) máximo global de f en el conjunto factible.

(d) El máximo global es $(1/3, 1/3, 1/3)$, donde f toma el valor $3 \times \left(-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{3}\right) = -\ln\frac{1}{3} = \ln 3$. El multiplicador es $\lambda = \ln 3 - 1 \approx 0.1$, luego

$$\Delta \text{ optimal value } \approx 0.1(0.85-1) = -0.015 < 0.$$

El nuevo valor óptimo es aproximadamente $\ln 3 - 0.015 \approx 1.1 - 0.015 = 1.085$.

$\boxed{4}$

Se considera la función $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-4)^2$ y el conjunto

$$A = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) (6 puntos) Escribir las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn–Tucker del problema

$$\max\ (x-3)^2 + (y-4)^2 \quad \text{sujeto a } x^2 + y^2 \leq 1.$$

(b) (6 puntos) Encontrar todas las soluciones de las condiciones de Kuhn–Tucker establecidas en el apartado (a).

(c) (3 puntos) Encontrar el máximo global de f en A.

Solución:

(a) Lagrangian: $L(x,y,\lambda) = (x-3)^2 + (y-4)^2 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$.

Las condiciones de Khun-Tucker son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2(x-3) - 2\lambda x = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2(y-4) - 2\lambda y = 0,\\
\lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \lambda(1 - x^2 - y^2) = 0,\\
&\lambda \geq 0,\\
&1 - x^2 - y^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(b) Consideramos el sistema con igualdades:

(i) $2(x-3) - 2\lambda x = 0$

(ii) $2(y-4) - 2\lambda y$

(iii) $\lambda(1 - x^2 - y^2) = 0$.

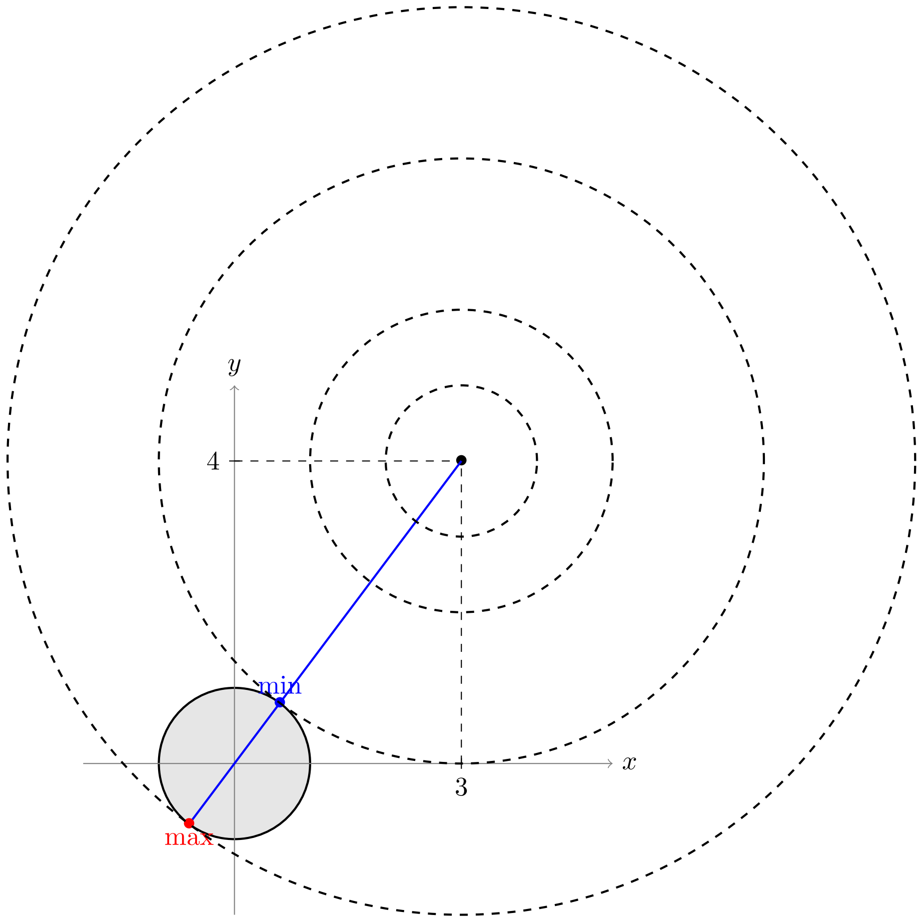
Si $\lambda = 0$, entonces por (i) y (ii) $(x,y) = (3,4)$. Pero $3^2 + 4^2 = 25 > 1$, luego $(3,4)$ no cumple K–T al no ser un punto factible.

Si $\lambda > 0$, entonces por (i) y (ii) $\lambda = \frac{x-3}{x} = \frac{y-4}{y}$. Como consecuencia, $1 - \frac{3}{x} = 1 - \frac{4}{y}$, luego $y = \frac{4}{3}x$. Al sustituir en (iii), $x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 1$, luego $x = \pm\frac{3}{5}$. Es decir, $(x,y) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ con $\lambda = 1 - 3/\frac{3}{5} = 1 - 5 = -4 < 0$, y $(x,y) = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ con $\lambda = 1 + 3/\frac{3}{5} = 1 + 5 = 6 > 0$ son soluciones. Obviamente, el único punto que satisface K–T es $(x,y) = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

Otra forma de resolver el sistema anterior es despejar x y y en función de λ, lo que es posible porque evidentemente $\lambda \neq 1$. De esta forma, por (i) $x = \frac{3}{1-\lambda}$ fy por (ii) $y = \frac{4}{1-\lambda}$. Yendo a la restriccón con estos valores, $\frac{9}{(1-\lambda)^2} + \frac{16}{(1-\lambda)^2} = 1$, se tiene $(1-\lambda)^2 = 25$ y $\lambda = 6 > 0$ or $\lambda = -4 < 0$. Eligiendo la solución positiva, se obtiene el punto cr'ıtico $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

(c) La función es continua y el conjunto es compacto, luego tel Teorema de Weierstrass puede aplicarse y el punto crítico proporciona por tanto el máximo global.

En la figura se ilustra el problema de optimización (se ha marcado tanto el máximo como el mínimo, aunque no se preguntaba nada sobre este extremo).


y
4
min
x
3
max