UC3M
Optimización Matemática para la Economía
Examen Final Recuperación
23 de junio de 2021

Niu: ____________ Grupo: ______

Nombre y apellidos: ____________________

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos	12	18	15	15	60
Nota					

Instrucciones:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 90'**.
- **No está permitido** el uso de calculadoras.
- **Apague** su teléfono.
- **No desgrape** el examen.
- Por favor, muestre un documento de identificación válido si se le es requerido.
- Lea el examen cuidadosamente. El examen consta de 4 ejercicios, para un máximo de 60 puntos.
- Justifique todas sus respuestas.

$\boxed{1}$

Se considera la función $f(x,y) = \dfrac{1}{y - \frac{x}{2} + 1}$ y el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 3,\ x-2 \leq y \leq x+1\}.$$

(a) (6 puntos) Representar el conjunto A y discutir si la función f y el conjunto A satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass. ¿Puede asegurarse la existencia de extremos globales de f sobre el conjunto A?

(b) (6 puntos) Representar algunas curvas de nivel de f sobre el plano, mostrando las direcciones de crecimiento y decrecimiento de f y halla, si existen, los extremos globales de f sobre A. En el caso de que no existan, justificar la respuesta.

$\boxed{2}$

Se considera la función $f(x,y) = (x^2 - x + 1)e^{x+ay^2}$, donde a es un parámetro diferente de 0, $a \neq 0$.

(a) (6 puntos) Encontrar los puntos críticos de f.

(b) (6 puntos) Para cada uno de los puntos críticos hallados en el apartado anterior, determinar el rango de valores del parámetro a para los cuales el punto crítico considerado es:

- Un máximo local.
- Un mínimo local.
- Un punto de silla.

(c) (6 puntos) Probar que la función f no tiene ni máximo ni mínimo globales.
Pista: Considerar la función $g(x) = f(x,0) = (x^2 - x + 1)e^x$ *y calcular* $\lim_{x\to\pm\infty}(x^2 - x + 1)e^x$.

$\boxed{3}$

Se considera el problema de Lagrange:

$$\text{Opt } f(x, y, z) = -x \ln x - y \ln y - z \ln z \quad \text{s.a: } x + y + z = 1$$

(a) (3 puntos) Obtener las ecuaciones de Lagrange.

(b) (3 puntos) Encontrar los puntos críticos de la función Lagrangiana.

(c) (3 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior. ¿Son extremos globales de f sujetos a la restricción? Justificar la respuesta.

(d) (6 puntos) Suponer que la restricción cambia a $x+y+z = 0.85$, es decir, el problema se transforma en

$$\text{Opt } f(x, y, z) = -x \ln x - y \ln y - z \ln z \quad \text{s.a: } x + y + z = 0.85.$$

Sin resolver este nuevo problema, hallar el valor óptimo aproximado de $f(x, y, z)$ tras el cambio. Esto implica obtener el valor aproximado del multiplicador, sabiendo que $\ln 3 \approx 1.1$.

$\boxed{4}$

Se considera la función $f(x, y) = (x-3)^2 + (y-4)^2$ y el conjunto

$$A = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(a) (6 puntos) Escribir las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn–Tucker del problema

$$\max\ (x-3)^2 + (y-4)^2 \quad \text{sujeto a } x^2 + y^2 \leq 1.$$

(b) (6 puntos) Encontrar todas las soluciones de las condiciones de Kuhn–Tucker establecidas en el apartado (a).

(c) (3 puntos) Encontrar el máximo global de f en A.
