

March 22, 2024

OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA PARA LA ECONOMÍA (2023-24)

ECONOMÍA, DERECHO-ECONOMÍA, ESTUDIOS INTERNACIONALES-ECONOMÍA

HOJA 3. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

- (1) Hallar los extremos de las siguientes funciones sujetas a restricciones.

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$ en $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

(b) $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$ en $x^2 + y^2 = 1$.

Respuesta: (a) Los puntos críticos del Lagrangiano son $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ con $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ y $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$ con $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Por el Teorema de Wierstrass, basta evaluar f en los puntos $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$, $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$, para encontrar las soluciones. Claramente el primero es el máximo global y el segundo el mínimo global.

(b) $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$ son mínimos globales y $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, son máximos globales.

- (2) Minimizar $x^4 + y^4 + z^4$ sobre el plano $x + y + z = 1$.

Respuesta: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es mínimo local.

- (3) Una empresa fabrica productos P_1 y P_2 . Los ingresos totales para x_1 unidades de P_1 y x_2 unidades de P_2 son $R = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 42x_1 + 102x_2$. Hallar x_1 y x_2 de forma que los ingresos sean máximos.

Respuesta: $(3, 6)$ es el máximo global.

- (4) La precios de venta de dos productos producidos por un monopolista son

$$p_1 = 256 - 3q_1 - q_2$$

$$p_2 = 222 + q_1 - 5q_2$$

donde p_1, p_2 son los precios y q_1, q_2 son las cantidades producidas. La función de costes es $C(q_1, q_2) = q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2$. Hallar las cantidades de cada producto que maximizan los beneficios.

Respuesta: $(q_1, q_2) = (28, 16)$ es el máximo global.

- (5) La función de producción de un fabricante es $4x + xy + 2y$. La cantidad total disponible para trabajo y capital es de 2000\$. Las unidades de trabajo y capital cuestan 20\$ y 4\$ respectivamente.

(a) Razona que $20x + 4y = 2000$.

- (b) *Halla el nivel máximo de producción del fabricante con la restricción del apartado anterior.*

Respuesta: (49.4, 253) es el máximo global.

- (6) *A un editor se le han asignado 60.000 para gastar en producción y publicidad de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan x miles de dólares en producción e y miles de dólares en publicidad se venderán aproximadamente $f(x, y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares del libro. ¿Cuánto dinero debe asignar el editor a producción y cuánto a publicidad para maximizar las ventas?*

Respuesta: (36000, 24000) es un máximo local y también global por el Teorema de Weierstrass.

- (7) *Un minorista vende dos productos que se hacen competencia, y cuyos precios respectivos son P_1 y P_2 . Hallar P_1 y P_2 de forma que los ingresos sean máximos siendo $R = 500P_1 + 800P_2 + 1,5P_1P_2 - 1,5P_1^2 - P_2^2$.*

Respuesta: $(\frac{2800}{3}, 600)$ es máximo global.

- (8) *La función de utilidad de un consumidor es $u(x, y) = \frac{1}{3} \ln x + \frac{2}{3} \ln y$ siendo x e y el consumo realizado de dos bienes, cuyos precios son, respectivamente, p_1 y p_2 . Suponiendo que el agente dispone de una renta M , calcular las cantidades que demandaría de cada bien, dependiendo de la renta M y de los precios.*

Respuesta: $(\frac{M}{3p_1}, \frac{2M}{3p_2})$ es máximo global.

- (9) *Hallar y clasificar los puntos extremos de la función dada en el conjunto correspondiente.*
 (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 1, 2x - 3y - z = 4\}$.
 (b) $f(x, y, z) = (y + z - 3)^2$ en el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y + z = 2, x + y^2 + 2z = 2\}$.
 (c) $f(x, y, z) = x + y + z$ en el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x - y - z = 1\}$.
 (d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, x + y + z = 4\}$.

Respuesta: (a) $(\frac{92}{59}, -\frac{19}{59}, \frac{5}{59})$ mínimo global; (b) $(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4})$ y $(1, 1, 0)$ son ambos mínimos locales. Puede probarse que el primero es global; (c) $(1, 0, 0)$ máximo global y $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ mínimo global.

- (10) *[Examen Final de mayo de 2022] Se considera el siguiente problema de Lagrange:*

$$\text{Optimizar } f(x, y) = xy - 3x - 6y$$

$$\text{sujeto a: } g(x, y) = 2x + 4y = 40.$$

- (a) Encontrar todos los puntos críticos del problema.

- (b) Encontrar todos los extremos locales de $f(x, y)$ sujetos a la restricción. Justificar si los extremos locales son o no globales.
- (c) Se supone que $f(x, y)$ es la función de beneficios de una empresa y que $2x + 4y = 40$ es la restricción presupuestaria, ambas expresadas en miles de euros.

Calcular de forma aproximada el incremento en los beneficios si los fondos de la empresa se incrementan en 1.000 euros.

Respuesta: (a) $(x^*, y^*) = (10, 5)$ y multiplicador $\lambda = 1$; (b) el espacio tangente es $\{(2v, -v) : v \in \mathbb{R}\}$ y la Hessiana restringida es $-4v^2$, luego se trata de un máximo local. De hecho, es global, como puede verse al substituir la restricción en la función objetivo; (3) el multiplicador es la derivada de la función valor, $\lambda = V'(b)|_{b=40}$. Dado que $\lambda = 1$, tenemos que $\Delta V \approx \lambda \Delta b$ y, por tanto, $\Delta V \approx \Delta b = 1000$.

- (11) [Examen Final de junio de 2022] Una empresa estatal gestionada por el Gobierno del país G produce dos bienes A y B, de los que vende x e y unidades diarias, respectivamente. La función de costes está dada por

$$C(x, y) = xy + 2x^2 + y^2.$$

El precio unitario del bien A es $p_A(x, y) = 3 - 2x - \alpha y$, donde $\alpha > 0$ es un parámetro positivo. El precio unitario del bien B es constante, igual a 1, es decir, $p_B(x, y) = 1$.

- (a) Encontrar el rango de valores de α para los que la función de beneficios de la empresa es una función cóncava.
- (b) Sea $\alpha = 1$. Encontrar los valores de x e y que maximizan los beneficios de la empresa.
- (c) Sea $\alpha = 1$. El Gobierno ordena a los directivos de la empresa producir cantidades de los bienes A y B tales que el precio unitario del bien A sea 2, es decir, $p_A(x, y) = 3 - 2x - y = 2$. Encontrar los valores de x y de y que maximizan los beneficios de la empresa bajo esta restricción.
- (d) Sea $\alpha = 1$. Suponga ahora que el Gobierno ordena a los directivos de la empresa producir cantidades de los bienes A y B tales que el precio unitario del bien A sea $2 + \frac{1}{6}$, es decir, $p_A(x, y) = 3 - 2x - y = 2 + \frac{1}{6}$. Sin resolver este nuevo problema de Lagrange, dar una valor estimado del incremento (positivo o negativo) de los beneficios óptimos de la empresa con respecto al caso resuelto en el apartado (c) anterior, cuando el precio unitario de A fue fijado en 2. Base su respuesta en el valor del multiplicador encontrado en el apartado (c).

Respuesta: (a) La función de beneficios Π es cóncava si $0 < \alpha \leq 3$; (b) $(x^*, y^*) = (1/3, 1/6)$ es el máximo global; (c) $(x^{**}, y^{**}) = (3/8, 1/4)$ el máximo global, con multiplicador $\lambda = -\frac{1}{4}$; (d) la nueva restricción es $2x + y = 1 - \frac{1}{6}$, luego $\Delta b = -\frac{1}{6}$. Dado que $-\frac{1}{4} = \lambda = V'(1)$, y $V'(b) \approx \Delta V / \Delta b$, obtenemos $\Delta V \approx (-\frac{1}{4})(-\frac{1}{6}) = \frac{1}{24} > 0$.