February 21, 2020

# OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA PARA LA ECONOMÍA (2018-19)

*ECONOMÍA, DERECHO–ECONOMÍA, ESTUDIOS INTERNACIONALES–ECONOMÍA*

## HOJA 2. OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES

(1) *Hallar los puntos críticos de las siguiente funciones y clasificarlos:*

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

(c) $f(x,y) = e^{x\cos y}$.

(d) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$.

(e) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$.

(f) $f(x,y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$.

**Respuestas:** (a) $(0,0)$ punto de silla; (b) $(x,-x)$, $x \in \mathbb{R}$ son mín. globales; (c) $(0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; (d) $(0,0)$ punto de silla; (e) $(0, k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ puntos de sillas; (f) $(0,0)$ y $(0,4)$ son puntos de sillas y $(1,2)$ es mín. local.

(2) *Hallar para las siguientes funciones los puntos críticos. Aplicar el criterio de las derivadas segundas y mostrar aquellos puntos en los que el criterio no proporciona información.*

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3$.

(b) $f(x,y) = \left((x-1)^2 + (y+2)^2\right)^{1/2}$.

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x + 12y + 7$.

(d) $f(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3}$.

**Respuestas:** (a) $(0,0)$ punto de silla, no información; (b) $(1,-2)$ mín. global, no información; (c) $(1,-2)$ punto de silla, no información; (d) $(0,0)$ mín. global, no información.

(3) *Sea* $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$.

(a) *Hallar los puntos críticos y clasificarlos.*

(b) *¿Posee $f$ extremos absolutos? (sugerencia: considerar la recta $y = x$)*

**Respuestas:** (a) $(3,0)$, $(0,3)$ y $(3,3)$ son puntos de silla; $(2,2)$ es un máximo local; (b) $f$ no alcanza extremos globales.

(4) *Hallar los valores de las constantes $a$, $b$ y $c$ de forma que la función $f(x,y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$ tenga un mínimo local en el punto $(2/3, 1/3)$ con valor en ese punto de $-1/9$.*

**Respuestas:** $a = 1$, $b = -2$ y $c = \frac{1}{27}$.

(5) *Una función de ingreso es* $R(x, y) = x(100 - 6x) + y(192 - 4y)$ *en donde* $x$ *e* $y$ *denotan el número de artículos vendidos de dos productos. Dado que la función de coste correspondiente es* $C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20$ *determinar el beneficio máximo.*

**Respuestas:** $x = 3$, $y = 15$ es máximo global único. El beneficio máximo es $B(3, 15)$=3(100-18)+15(192-60)-(36+450+180-24+20)=246+1980-662=1810.

(6) *Una lechería produce leche entera y descremada en cantidades* $x$ *e* $y$ *respectivamente. Supongamos que el precio de la leche entera es* $p(x) = 100 - x$ *y el de la descremada* $q(y) = 100 - y$. *Supongamos que* $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ *es la función de costes. ¿Cuáles deberían de ser* $x$ *e* $y$ *para maximizar los beneficios?*

**Respuestas:** $(20, 20)$ es el máximo global.

(7) *Un monopolista produce un bien que es comprado por dos tipos de consumidores. Los consumidores del tipo 1 estón dispuestos a pagar* $50 - 5q_1$ *euros para comprar* $q_1$ *unidades del bien. Los consumidores del tipo 2 estarán dispuestos a pagar* $100 - 10q_2$ *euros para comprar* $q_2$ *unidades del bien. La función de costes del monopolista es* $c(q) = 90+20q$ *euros. ¿Cuánto debe producir el monopolista en cada mercado?*

**Respuestas:** $q_1 = 3$, $q_2 = 4$.

(8) *En el método de los mínimos cuadrados en la teoría de la regresión, la recta* $y = a + bx$ *se ajusta a los datos*

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

*de manera que se minimice la suma de los errores cuadráticos*

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2,$$

*mediante una elección adecuada de los parámetros* $a$ *(ordenada en el origen) y* $b$ *(la pendiente).*

(a) Determinar las condiciones necesarias que deben cumplir $a$ y $b$ para minimizar $E(a, b)$. Probar que se cumplen las condiciones suficientes de optimalidad.

(b) Hallar $a$ y $b$.

(c) Aplicar los resultados a los datos

$$(0, 0), (1, 1), (4, 2), (16, 4).$$

y dibujar un gráfico.

**Respuestas:** (a) (1) $\frac{\partial E}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a+bx_i)) = 0$, (2) $\frac{\partial E}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - (a+bx_i)) = 0$. $E$ es suma de funciones convexas: cada sumando $(y_i-(a+bx_i))^2$ tiene matriz Hessiana con respecto a las variables $(a,b)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2x_i \\ 2x_i & 2x_i^2 \end{pmatrix}$$

que es semidefinida positiva. Los puntos críticos de una función convexa son mínimos globales; (b) Sean $\overline{x}$, $\overline{y}$ los valores medios de $x_i$ y de $y_i$, respectivamente; las ecuaciones (1) y (2) anteriores son $a + b\overline{x} = \overline{y}$ y $a\overline{x} + b\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Resolviendo

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

y $a = -b\overline{x} + \overline{y}$.