January 24, 2019

OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA PARA LA ECONOMÍA (2018-19)

ECONOMÍA, DERECHO-ECONOMÍA, ESTUDIOS INTERNACIONALES-ECONOMÍA

HOJA 2. OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES

- (1) Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones y clasificarlos:
 - (a) $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$.
 - (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.
 - (c) $f(x, y) = e^{x \cos y}$.
 - (d) $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$.
 - (e) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.
 - (f) $f(x, y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$.
- (2) Hallar para las siguientes funciones los puntos críticos. Aplicar el criterio de las derivadas segundas y mostrar aquellos puntos en los que el criterio no proporciona información.
 - (a) $f(x, y) = x^3 + y^3$.
 - (b) $f(x, y) = ((x-1)^2 + (y+2)^2)^{1/2}$.
 - (c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x + 12y + 7$.
 - (d) $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$.
- (3) Sea $f(x, y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$.
 - (a) Hallar los puntos críticos y clasificarlos.
 - (b) ¿Posee f extremos absolutos? (sugerencia: considerar la recta $y = x$)
- (4) Hallar los valores de las constantes a , b y c de forma que la función $f(x, y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$ tenga un mínimo local en el punto $(2/3, 1/3)$ con valor en ese punto de $-1/9$.
- (5) Una función de ingreso es $R(x, y) = x(100 - 6x) + y(192 - 4y)$ en donde x e y denotan el número de artículos vendidos de dos productos. Dado que la función de coste correspondiente es $C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20$ determinar el beneficio máximo.
- (6) Una lechería produce leche entera y descremada en cantidades x e y respectivamente. Supongamos que el precio de la leche entera es $p(x) = 100 - x$ y el de la descremada $q(y) = 100 - y$. Supongamos que $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ es la función de costes. ¿Cuáles deberían de ser x e y para maximizar los beneficios?
- (7) Un monopolista produce un bien que es comprado por dos tipos de consumidores. Los consumidores del tipo 1 están dispuestos a pagar $50 - 5q_1$ euros para comprar q_1 unidades del bien. Los consumidores del tipo 2 estarán dispuestos a pagar $100 - 10q_2$ euros para comprar q_2 unidades del bien. La función de costes del monopolista es $c(q) = 90 + 20q$ euros. ¿Cuánto debe producir el monopolista en cada mercado?
- (8) En el método de los mínimos cuadrados en la teoría de la regresión, la recta $y = a + bx$ se ajusta a los datos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n),$$

de manera que se minimice la suma de los errores cuadráticos

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2,$$

mediante una elección adecuada de los parámetros a (ordenada en el origen) y b (la pendiente).

- (a) Determinar las condiciones necesarias que deben cumplir a y b para minimizar $E(a, b)$.
Probar que se cumplen las condiciones suficientes de optimalidad.
- (b) Hallar a y b .
- (c) Aplicar los resultados a los datos

$$(0, 0), (1, 1), (4, 2), (16, 4).$$

y dibujar un gráfico.